

UNIVERSITÉ DE PARIS - FACULTÉ DES LETTRES

La Philosophie Mathématique et la Théorie des Ensembles

THÈSE POUR LE DOCTORAT D'UNIVERSITÉ

présentée à la Faculté des Lettres de l'Université de Paris

PAR

TING-HO TSENG

Licencié es Sciences de l'Université de Tsing-Hua (Chine)

PARIS

VIGOT FRÈRES, ÉDITEURS

23, RUE DE L'ÉCOLE-DE-MÉDECINE, 23

1938

LA PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE
ET LA THÉORIE DES ENSEMBLES



Digitized by the Internet Archive
in 2026

UNIVERSITÉ DE PARIS - FACULTÉ DES LETTRES

La Philosophie Mathématique et la Théorie des Ensembles

THÈSE POUR LE DOCTORAT D'UNIVERSITÉ

présentée à la Faculté des Lettres de l'Université de Paris

PAR

TING-HO TSENG

Licencié es Sciences de l'Université de Tsing-Hua (Chine)

PARIS

VIGOT FRÈRES, ÉDITEURS

23, RUE DE L'ÉCOLE-DE-MÉDECINE, 23

—
1938



LA PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE ET LA THÉORIE DES ENSEMBLES

INTRODUCTION

Il y a toujours une théorie correspondant, en philosophie, à chaque théorie nouvelle de la science. On peut même dire qu'une théorie scientifique ne peut être dite nouvelle que si elle a une grande influence en philosophie. Cela est de toute évidence d'après un examen de l'histoire de la philosophie scientifique. Nous parlons, par exemple, des deux plus nouvelles théories : la théorie des ensembles en mathématiques et la théorie de quanta en physique. Il est bien clair que la valeur de la théorie des quanta, en physique, et la valeur de la théorie des ensembles en mathématiques, sont éclatantes. Presque toutes les branches de la physique se servent de la théorie des quanta et presque toutes les branches de mathématiques utilisent la théorie des ensembles.

Si leur valeur est grande ce n'est pas seulement parce qu'elles ont été utilisées partout, mais aussi parce qu'elles ont de grandes influences en philosophie scientifique.

Dans la présente thèse, nous voulons examiner l'influence de la théorie des ensembles sur la philosophie mathématique. Nous nous occuperons d'abord d'un aperçu historique sur le développement de la théorie des ensembles et son application. Ensuite, nous examinerons, suivant l'influence de cette théorie, chaque problème de la philosophie mathématique. Nous considérerons d'abord la définition du point de vue de la classification d'un ensemble, question qui n'est pas généralement traitée en logique classique. Nous étudierons ensuite, au chapitre III et au chapitre IV respectivement, la démonstration et l'existence, et nous nous occuperons spécialement de la doctrine de la logistique.

Le cinquième chapitre de cette thèse aura pour objet d'exa-

miner la logique de la probabilité, qui est considérée de nos jours, comme une des applications importantes de la théorie des ensembles.

A la fin de cette thèse, nous tracerons une esquisse sur les différentes opinions de la théorie qui constituent la base de la mathématique — les indémontrables et les indéfinissables — sous le titre : « l'hypothèse ». Ceci caractérise, en effet, la différence entre la mathématique et la logique.

En conclusion, nous montrerons historiquement que la philosophie mathématique a fait une étape de progrès sous l'influence de la théorie des ensembles, mais que ce progrès est tout naturel de même que les autres théories mathématiques ont aussi une influence sur la philosophie.

CHAPITRE PREMIER

APERÇU HISTORIQUE

1. -- Généralités

A travers les diverses périodes historiques de notre civilisation, l'étude des mathématiques se pratiqua à la fois pour son utilité et pour sa beauté. Nous disons pour l'utilité, car il est des cas où les mathématiciens abordent les problèmes ayant pour objet de satisfaire à un besoin de la physique ou de l'astronomie quand les physiciens ou les astronomes leur demandent de rechercher quelque résultat en vue d'une application. Ainsi se sont développées l'ancienne géométrie et l'ancienne mécanique. Ce fut peut-être la première raison de la culture des mathématiques. Ainsi ce n'est pas la science du nombre, la mathématique abstraite qui, parmi les diverses branches des mathématiques, s'est développée la première, ce sont les mathématiques concrètes, les mathématiques appliquées, la géométrie et la mécanique. Mais il est évident que ce n'est pas la seule cause du progrès des mathématiques, car elles ont encore d'autre objet que de venir en aide aux autres, les physiciens et les astronomes (XV. 1).

Nous savons que le rôle de la science est en effet de produire de l'économie de la pensée, de même que la machine produit l'économie de l'effort. Nous ne nous satisfaisons pas d'une voiture, alors nous prenons une auto, ou bien un avion ; c'est pour l'économie du temps. Il en est de même pour la pensée. La pensée la plus belle est celle qui produit le plus d'économie. On ne se satisfait pas d'une méthode ou d'une théorie et l'on en cherche une autre pour la simplifier, pour en faire l'économie. C'est pourquoi les mathématiques

(1) Voir Bibliographie à la fin du livre.

— les sciences en général — ont été cultivées nécessairement pour leur beauté.

Pour l'utilité : ce sont les mathématiques pour les applications, et pour la beauté : ce sont les mathématiques pour les mathématiques. En premier lieu, nous avons donc la physique mathématique et la chimie théorique ; en second lieu, c'est la mathématique pure. En général, une méthode d'application doit être établie de la façon la plus commode possible, mais elle peut ne pas être très exacte. Au contraire, l'esprit de « la science pour la science » nous donne une science très exacte, pure et produit même quelquefois une philosophie scientifique qui explique, comme la science elle-même, mais plus loin que celle-ci (XVII. 1). Elle ne s'intéresse pas aux autres, elle s'intéresse seulement à elle-même.

A cause de cela les mathématiques ont deux directions dans leur développement : leurs applications et leurs principes.

Je me permets d'abord de m'intéresser seulement à l'analyse mathématique. La première étape du progrès de l'analyse mathématique moderne date de la fin du dix-septième siècle par l'introduction d'une notion nouvelle fondamentale : l'infiniment petit. En ce qui concerne cette notion, nous ne pouvons pas dire que sa découverte se ramène exclusivement à quelqu'un de définitif, à NEWTON ou à LEIBNITZ, par exemple, mais seulement que c'est NEWTON ou LEIBNITZ qui fut le premier à réaliser cette idée en mathématiques. Il est démontré par ailleurs que la première idée du calcul se retrouve dans les ouvrages helléniques. La notion de l'intégration est basée sur la méthode d'exhaustion ou le calcul par l'exhaustion des Grecs (IV). Les calculs des aires d'une parabole par le grand savant ARCHIMÈDE sont déjà une conception originale de l'intégration. « L'application la plus simple de la notion d'intégrale est la quadrature des domaines plans. A cause de cette application, on a fait souvent remonter la notion de l'intégrale définie à ARCHIMÈDE et à la quadrature de la parabole » (XIV. 1).

L'influence de l'invention de la notion de l'infiniment petit est extrêmement grande. Elle nous donne un changement complet du point de vue de la quantité ordinaire. Qu'est-ce qu'un infiniment petit ? Il n'est pas une quantité de la grandeur, comme nous le considérons d'habitude. Un infi-

niment petit peut être plus petit que n'importe quel petit nombre. Il n'est pas zéro, il est comme l'a dit LEIBNITZ : « Cette quantité d'être plus petit que tout nombre donné à l'avance, aussi petit soit-il ». Il est, en effet, un nombre idéal, un nombre indéfini ou bien un concept de quantité seulement.

Par cette première étape de leur progrès, les mathématiques peuvent être examinées de deux points de vue différents : de leur fondement et de leurs applications. C'est à ces deux points de vue que LEIBNITZ avait ramené l'une et l'autre des considérations philosophiques et des problèmes géométriques. Il nous semble donc plus clair de considérer l'infiniment petit comme une conception philosophique dont l'application serait le calcul infinitésimal et le calcul intégral. Ou bien, en partant du calcul nous disons que l'origine de la pensée du calcul infinitésimal est la conception philosophique de l'idée de l'infiniment petit.

Après les travaux de NEWTON et de LEIBNITZ, c'est la théorie cartésienne qui exerça l'influence la plus grande sur les mathématiques et sur la philosophie. Comme savant, DESCARTES a deux très grands titres à invoquer : la création de la géométrie analytique et la constitution d'une physique mécaniste embrassant tous les phénomènes de la nature matérielle. Il y a certainement une grande influence dans la théorie de la philosophie et dans celle de la mathématique par la théorie de DESCARTES, comme l'a dit M. A. REY : « Pendant longtemps — jusqu'à la fin du dix-huitième siècle peut-être — on eut tranché alternative en faveur de sa première partie. Chez les Grecs et au Moyen-Age, philosophie et science ne semblent jamais avoir été séparées. A partir de la Renaissance et surtout de DESCARTES, la philosophie n'est que la science moderne, dans son objet, son esprit et sa méthode. La méthode cartésienne aussi bien que la méthode empirique impliquant la continuité la plus étroite entre la science et la philosophie » (XVII. 2).

Après NEWTON, qui a posé les bases de la mécanique rationnelle par la découverte de la loi de la gravitation universelle, la mécanique eut son couronnement dans la nouvelle mécanique analytique de LAGRANGE. Elle a donc fait à la fin du dix-neuvième siècle des progrès éclatants ; car GAUSS et LAPLACE ont créé la physique mathématique ; mais

c'est encore grâce à l'invention du calcul infinitésimal et de la méthode analytique.

L'étude mathématique après cette période devenait de plus en plus minutieuse. En analyse, le génie de CAUCHY (1789-1857) fonda une grande spécialité : la théorie des fonctions. Le mot *fonction* est alors plus étendu au sens de CAUCHY. Au point de vue de CAUCHY, la fonction est la valeur de l'effet quand on connaît la valeur de la cause, c'est-à-dire la variable. Il a déduit de cette connaissance, la relation causale, la fonction, pour n'importe quelle valeur possible de la cause.

D'après cette idée nouvelle de la fonction mathématique, on a vu généraliser en logique par les nombreux logiciens ce qu'ils ont appelé la fonction propositionnelle qui joue, maintenant, un rôle tout à fait analogue à la fonction mathématique dans l'étude logique nouvelle que nous allons rencontrer au chapitre prochain.

C'est du début du vingtième siècle que date la deuxième étape du progrès des analyses mathématiques grâce aux travaux sur la théorie récente des fonctions dont R. BAIRE (1874-1932), M. E. BOREL et M. H. LEBESQUE furent les fondateurs (VII. 1). Cette nouvelle théorie subit l'influence de celle de WIERSTRASS (1815-1897), de DARBOUX (1842-1917) sur les fonctions continues qui n'admettent pas de dérivés d'une part, et est basée, d'autre part, sur la théorie nouvelle des ensembles de CANTOR (1845-1918) de la logique mathématique de G. PÉANO (1858-1932) et de la théorie des nombres de R. DEDEKIND (1831-1916). Ces diverses théories avaient déjà été établies à la fin du dix-neuvième siècle, surtout la théorie des ensembles qui est la plus importante et la plus influente.

Il est évident que la relation entre la théorie des ensembles et la théorie des fonctions est effectivement semblable à celle qui subsiste entre la théorie des groupes et la géométrie moderne. La théorie de MM. BOREL et LEBESQUE ne peut pas se concevoir sans les ensembles ; de même que la théorie de M. CARTAN ne se justifie pas sans les groupes. En d'autres termes les mathématiques modernes non seulement forment des sciences du nombre, de l'espace, de la grandeur, du mouvement, mais encore elles comprennent aussi ce que COUTURAT avait appelé la science de multiplicité et la science de l'ordre (V. 1).

Les conséquences de la théorie des ensembles sont, comme la notion de l'infiniment petit, de jour en jour plus importantes et l'on peut dire qu'il n'est plus une partie des mathématiques où cette discipline ne vienne s'infiltrer. Analogue à l'idée de l'infiniment petit, elle a marqué aussi de son empreinte jusqu'à la philosophie et la logique.

En résumé, nous pouvons constater que l'analyse mathématique moderne est fondée sur deux concepts fondamentaux : l'infiniment petit du dix-septième siècle, et le principe des ensembles du vingtième siècle. Ces deux concepts fondamentaux ont tous des rôles aussi importants en philosophie qu'en mathématique.

2. -- Le développement de la théorie des ensembles

La théorie des ensembles a été créée de toutes pièces en Allemagne, au milieu du siècle dernier, par G. CANTOR, l'un des esprits les plus profonds qui se soient rencontrés dans la science contemporaine. C'est lui qui conçoit le premier, avec rigueur, sur des nombres plus grands qu'infinis ou, comme il les a appelés, sur des nombres transfinis, un terme tout à fait étrange, tout à la fois en mathématique et en philosophie. Ainsi que par PEANO en Italie, qui réussit à construire une courbe qui remplit tout un carré en passant par chaque point d'un carré. Et enfin par C. JORDAN (1838-1921) en France qui introduisit quelques notions fondamentales : la mesure élémentaire des ensembles, propriétés des courbes simples, etc., et établit la relation entre le point de vue géométrique et le point de vue des ensembles. On peut considérer les fameuses courbes de JORDAN comme un des fondements de la géométrie contemporaine de situation — l'analyse située.

Depuis longtemps, on se servait des nombres finis comme fondement de toute analyse. Cependant, si l'on considérait les collections d'une infinité d'objets en appliquant le nombre infini, les lois valables pour les nombres finis ne nous donneraient pas encore facilement les résultats corrects, et l'on arriverait à des paradoxes, à des contradictions. C'est la théorie des ensembles qui peut y mettre de la clarté.

Il n'est pas possible d'exposer ici la théorie des ensembles ; elle fait d'ailleurs l'objet de mémoires et de traités de plus en plus nombreux. Mais je crois pouvoir esquisser sans trop de peine la conception d'un ensemble. Nous ne voulons pas chercher maintenant la définition du mot « ensemble », nous voulons seulement nous proposer d'éclaircir par des exemples le sens de ce mot ; mais ces exemples ne donneraient qu'une idée générale du mot « ensemble ». Nous pouvons dire que cinq pommes, trois bananes forment un ensemble ; nous pouvons dire aussi que tous les nombres entiers forment un ensemble, tous les nombres rationnels, tous les points dans un cercle, etc., forment des ensembles. En somme l'on peut dire qu'on entend par ensemble une collection d'un nombre fini ou infini d'objets quelconques. Le mot : « collection » doit être pris ici dans le sens le plus large possible. Un ensemble sera considéré comme donné, comme défini, si les éléments sont donnés et définis. Mais cette conception sera modifiée plus loin.

Les ensembles des nombres et les ensembles des points sont des notions interchangeables, car un nombre peut être figuré sur un axe dirigé ox par le point dont ce nombre mesure l'abscisse. Un système de deux nombres (x, y) peut être figuré par le point d'abscisse x et d'ordonnée y dans le plan ; et ainsi de suite. On préfère quelquefois parler des points au lieu des nombres parce que l'image géométrique est plus frappante à l'esprit que l'idée abstraite de nombre. La théorie des ensembles des points ou la théorie des ensembles des nombres est manifestement liée avec toutes les branches des mathématiques.

Les principes de cette théorie, après un certain temps de recherches, ont été exposés et discutés dans tous les ouvrages classiques de la théorie des fonctions comme un des chapitres les plus importants. Dans la « Collection de Monographies sur la théorie des fonctions », publiée sous la direction de M. BOREL, nous trouvons tout d'abord le livre de M. BOREL lui-même : « Leçon sur la théorie des fonctions. Eléments et principes de la théorie des ensembles, applications à la théorie des fonctions », et ensuite les travaux de MM. LEBESQUE, DE LA VALLÉE POUSSIN, FRÉCHET, et particulièrement ceux de MM. LUSIN et SIERPINSKI qui ont publié deux livres où ils ont tout spécialement traité cette théorie.

Actuellement la théorie des ensembles est un des domaines des mathématiques où l'on travaille le plus. Nombreux sont les savants qui appellent ces théories les fondements des mathématiques. Il y a même une revue paraissant en Pologne : *Fundamenta Mathematicae*, publiant des travaux consacrés à la théorie des ensembles, à ses applications et aux questions qui s'y rattachent. Grâce à elle, son créateur, M. W. SIERPINSKI a organisé toute une école polonaise de cette théorie. La revue paraissant depuis dix-sept ans, a publié 732 travaux de 170 auteurs, y concluant de nombreuses applications dans la logique mathématique, pendant les premières quinze années (1920-1935).

En analyse mathématique, les fonctions sont regardées comme des ensembles de nombres dont on étudie les propriétés. Les travaux de MM. BOREL et LEBESQUE sur la théorie des fonctions sont des applications tout à fait générales. En géométrie, d'après JORDAN, une partie de l'analyse située est l'étude des ensembles des points d'où ils représentent des lignes ou d'autres figures. Malgré ceci, l'idée de CANTOR a aussi marqué de son empreinte jusqu'à la logique et la philosophie.

3. -- L'application de la théorie des ensembles sur l'intégration

Nous avons dit que la théorie des ensembles avait fait de grands progrès à la fin du dix-neuvième siècle et que, grâce à elle, la théorie des fonctions ainsi que la géométrie moderne ont fait un grand pas. Le mérite revient presque simultanément à trois hommes : R. BAIRE, M. E. BOREL et M. H. LEBESQUE. BAIRE a tout d'abord commencé par creuser la notion de continuité et réussit à la décomposer en deux semi-continuités ; ce qui représente un instrument d'analyse excessivement puissant. En partant ainsi, BAIRE établit une classification des fonctions : « La classification de BAIRE », comme on dit maintenant (VII. 2). Il a rangé dans les fonctions de classe zéro toutes les fonctions continues ; les fonctions de classe un, sont celles qui peuvent être considérées comme les limites d'une suite convergente des fonctions con-

tinues ; et en général, une fonction est dite de classe (a) si elle est la limite d'une suite des fonctions de classe (a-1) et n'appartient pas à chacune de la classe inférieure, c'est-à-dire des classes 1, 2, 3... (a-1) (I. 1). M. BOREL a démontré que cette classification n'est pas purement idéale mais qu'il existe effectivement des fonctions dans les diverses classes définies par BAIRE (II. 1).

La relation la plus importante liant la théorie des ensembles et la théorie des intégrations est la théorie de la mesure, telle la mesure nouvelle des ensembles. Pour cette idée de la mesure nouvelle, on doit à M. BOREL la précision d'une notion fondamentale. Nous savons que la mesure des grandeurs repose sur un axiome fondamental : Le tout est la somme des parties. C'est EUCLIDE qui le premier a formulé cet axiome. Cette mesure était fondée par lui sur les mathématiques des grandeurs, des espaces, c'est-à-dire sur la géométrie élémentaire. En généralisant dans la théorie des ensembles, cette loi demande à être vérifiée encore.

La mesure d'un ensemble fut pour la première fois définie par JORDAN qui lui a donné le nom « étendue ». Mais cette notion de mesure n'est pas très commode quand il s'agit des ensembles généraux, puisqu'il en existe une grande classe non mesurable au sens de cette définition. A cause de cette raison, M. BOREL et M. LEBESQUE généralisaient presque en même temps ce qu'ils appelaient la mesure des ensembles.

Pour bien comprendre ce que nous allons rappeler, nous donnerons d'abord quelques définitions fondamentales.

Soit tout élément (objet) d'un ensemble M est en même temps élément d'un autre élément ensemble N ; on dit que l'ensemble M est un sous-ensemble de l'ensemble N, et l'on écrit :

$$McN.$$

La relation entre les ensembles M et N exprimés par le signe (c) s'appelle inclusion. On dit la formule McN l'ensemble N contient l'ensemble M ; la relation d'inclusion est, comme on le voit sans peine, transitive, c'est-à-dire

$$McN \text{ et } NcP$$

entraînent toujours la formule

$$McP.$$

Nous revenons à la mesure des ensembles.

Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble E formé de points l'axe ox , un nombre $m(E)$ dépendant de l'ensemble E , que nous appelons la mesure de l'ensemble E et qui satisfait aux conditions suivantes :

i. Deux ensembles des points égaux, c'est-à-dire qu'on peut les coïncider par un déplacement de l'un d'eux sur l'autre, ayant même mesure. (Condition de l'égalité de deux mesures).

ii. L'ensemble, somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable ⁽¹⁾ d'ensembles sans point commun, deux à deux, ayant pour mesure la somme des mesures (La somme des mesures).

iii. La mesure de l'ensemble de tous les points de $(0, 1)$ est 1 (L'unité de la mesure).

C'est la définition logique de la mesure, elle est comme toutes les autres définitions mathématiques de longueur, elle ne se définit pas en elle-même. Elle ne nous donne que leur équivalent, leur somme et leur unité (V. 2).

A l'aide de cette mesure nouvelle M. LEBESQUE nous donne une définition nouvelle de l'intégration (XIV. 2). Cette recherche remarquable devient maintenant classique dans la théorie des fonctions.

Une intégrale peut être considérée des deux façons suivantes :

i. La première est celle qui définit l'intégrale comme l'opération permettant de résoudre pour dérivée une fonction donnée $f(x)$.

ii. Dans la deuxième, une intégrale peut être considérée comme la limite d'une somme des termes infinis des éléments infinitésimaux.

Un traité rigoureux de ce sujet date du temps de CAUCHY et RIEMANN (1826-1866). Primitivement la définition de CAUCHY se rapportait seulement au cas où des fonctions sont continues (ou bien ayant un nombre fini de points de discontinuité) ; elle était ensuite étendue par RIEMANN en fonction bornée, c'est-à-dire en fonction restant toujours comprise entre deux nombres finis. Et par conséquent, nous avons aussi en même temps ce qu'il a appelé la condition de l'existence d'une telle intégrale, c'est-à-dire l'intégrabilité de l'in-

(1) Voir notre chapitre IV.

tégrale riemannienne ; car il arrive souvent qu'une fonction ne peut pas être intégrée ; pour qu'une fonction soit intégrable au sens de RIEMANN, il faut et il suffit :

i. qu'elle soit bornée ;

ii. que l'ensemble des points où son oscillation est positive (i. e. le point de discontinuité) soit de mesure zéro.

Mais les fonctions qui ne satisfont pas à ces conditions sont très nombreuses et il s'agit même souvent de fonctions qui ne sont pas du tout extraordinaires et qui ne sont pas intégrables au sens de RIEMANN. C'est pourquoi M. LEBESQUE l'a généralisée.

La différence essentielle entre l'intégrale ancienne de RIEMANN et l'intégrale nouvelle de M. LEBESQUE est que l'intégrale de LEBESQUE est définie sur un ensemble tandis que l'intégrale de RIEMANN est définie sur un intervalle. Et de plus, dans l'intégrale RIEMANN, les intervalles de l'intégration sont subdivisés sur l'axe de variable indépendance tandis que dans l'intégrale LEBESQUE, les subdivisions sont prises sur l'axe de variable dépendante (XIV. 3).

Par conséquent l'intégrale LEBESQUE est plus étendue de telle sorte qu'une fonction intégrable au sens RIEMANN est donc intégrable (on dit aussi sommable) au sens LEBESQUE ; mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai. En supposant par exemple $f(x)$ une fonction caractéristique de l'ensemble de tous les nombres rationnels entre (0, 1), c'est-à-dire au cas où cette fonction jouit des propriétés suivantes (VIII. 3) :

$f(x)=0$ pour tous les nombres irrationnels

entre (0, 1).

$f(x)=1$ pour tous les nombres rationnels

entre (0, 1).

Cette fonction $f(x)$ ainsi définie est totalement discontinue, c'est-à-dire que tous les points sont les points de discontinuité dans l'intervalle donné, mais que la mesure de l'ensemble des points de discontinuité n'est pas zéro, l'intégrale RIEMANN de cette fonction n'existe donc plus. Mais l'intégrale LEBESQUE existe au contraire.

Les recherches de M. LEBESQUE sur l'intégration à l'aide de la théorie des ensembles ont été poursuivies d'une manière brillante par M. DENJOY qui avait fait des études extrêmement approfondies sur les nombres dérivés par la méthode des ensembles (VI. 1). Et enfin il a donné une nou-

velle définition de l'intégration plus générale que celle de M. LEBESQUE. Le terme « Totalisation » n'est employé par lui que pour le distinguer du terme intégration. Pour cette généralisation, il peut donc exister des fonctions qui ne sont pas sommables au sens de M. LEBESQUE mais peuvent être totalisées par le moyen de M. DENJOY.

En dehors des définitions de l'intégration considérées ici, il y a en a encore d'autres trouvées dans la littérature mathématique. Ainsi, nous avons l'intégrale STILTJES, l'intégrale PERRON et l'intégrale YOUNG (XIV. 4). Mais en tout cas il est bien clair que toutes ces définitions nouvelles sont fondées sur la théorie des ensembles.

4. -- La théorie des ensembles et la géométrie

De tout le temps il y a eu un rapport étroit entre l'état général de la science mathématique et la nature des figures étudiées par la géométrie ; la science antique, spécialement les sciences des Grecs et des Egyptiens, ne connaissaient guère que la droite, le plan, le cercle, la sphère, etc. A cela se bornait le catalogue des figures géométriques. Ceci caractérise la première cause — l'utilité — du développement des mathématiques. Cette sorte de figures a été étudiée partout jusqu'au Moyen-Age, la naissance de la méthode analytique, création de DESCARTES de la géométrie analytique. La géométrie cartésienne fondée sur la méthode algébrique a pris une extension considérable. Nous avons donc changé notre avis de synthétique en analytique et nous avons désormais une conception des figures tout à fait différente, car il s'établit alors une correspondance entre les points et les nombres, et entre les fonctions et les figures.

Enfin, l'invention du calcul infinitésimal nous avait ouvert un domaine de recherche extrêmement large.

A partir de ce moment, la géométrie infinitésimale put prendre son plein développement, et son essor a encore été accru par la naissance de la géométrie projective, par l'introduction de la notion de groupe et, enfin, par le développement récent de la théorie des ensembles.

De même que le sens du mot : *fonction*, a évolué en ana-

lyse d'après la nouvelle théorie des ensembles, de même celui du mot : *courbe* s'est progressivement modifié en géométrie.

Tout d'abord, est apparue la proposition de CANTOR en 1887, d'après laquelle il existe une application bi-univoque de tous les points d'un carré sur un segment fini d'une droite. Ceci démontre que l'infinité des points d'une droite et l'infinité des points d'un carré sont deux quantités égales. C'est exactement de la même façon qu'on peut généraliser cette proposition en ce sens que les points d'un espace à n -dimensions peuvent être posés en un-un correspondance avec ceux d'une droite ; autrement dit qu'à chaque point d'un espace à n -dimensions il y a un point d'une droite correspondante. Ceci présente alors un paradoxe intéressant, car l'on pourrait regarder un carré comme indéfiniment plus riche en points qu'un segment ; et de même, un espace à n -dimensions comme infiniment plus riche en points qu'un espace à $(n-1)$ -dimensions et par conséquent à une droite.

Un peu plus tard que CANTOR, PEANO en Italie construit une courbe qui remplit toute une aire carrée. D'après ce travail, l'idée de courbe doit être changée d'une manière plus généralisée. Elle peut alors, en géométrie plane, par exemple, se concevoir comme la frontière d'un domaine ou comme une trajectoire d'un mouvement.

Pour la première, nous disons qu'une courbe est l'ensemble des points représentatifs d'une fonction continue sous une forme explicite :

$$y=f(x),$$

ou bien sous une forme implicite :

$$F(x, y)=0.$$

C'est qu'elle est la frontière commune d'un ensemble ouvert formé des points pour lesquels on a $F(x, y)<0$, et de l'ensemble des points pour lesquels on a $F(x, y)>0$.

Deuxièmement, une courbe serait représentée par les fonctions continues paramétriques d'une variable :

$$x=f(t)$$

$$y=f(t)$$

où le paramètre t peut signifier le temps. Par cette forme, JORDAN a constitué ce que nous appelons maintenant les courbes JORDAN (XII). C'est un ensemble plan qui est établi

un continu avec les points correspondants avec ceux d'un segment (ou un intervalle fermé) d'une droite ; analytiquement, cette définition est équivalente à la suivante :

La classe des continues représentables sous la forme :

$$x=f(t)$$

$$y=f(t)$$

dans un plan cartésien où $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions continues de la variable t parcourant quelque intervalle fermé, est une classe de courbes de JORDAN.

Donc, la géométrie et les ensembles seront liés et se rapprocheront de plus en plus d'après cette nouvelle définition. M. BOULIGAND, de Poitiers, qui a publié depuis plusieurs années des travaux remarquables sur cette théorie, lui avait donné un nom spécial : la géométrie directe (III).

5. -- La théorie des ensembles et la philosophie mathématique

Historiquement, avant le Moyen-Age, les mathématiques et la philosophie ne semblent jamais avoir été séparées. Plusieurs parmi les savants étaient des mathématiciens en même temps que des philosophes. Je ne veux pas traiter ici plus loin que de la métaphysique des Pythagoriciens.

PYTHAGORE (581 avant J. C.-504 avant J. C.), ainsi qu'on le sait, est l'homme qui découvrit le théorème du carré de l'hypoténuse. Ce théorème pose un rapport de nombre en même temps qu'un rapport géométrique. A partir de ce rapport, PYTHAGORE a entrevu la possibilité d'une science universelle de tous les rapports, de toutes les harmonies du monde, envisagées comme nombres. D'après sa doctrine, les nombres sont considérés comme l'essence de la pensée. Pour expliquer ces choses, il faut les ramener au nombre qui rend tout intelligible. Ce sont les « nombres » qui font la connaissance et l'existence.

De plus, pour les Pythagoriciens, la mathématique est différente de la logique, mais elle est considérée comme étant plus près de la logique que toutes les sciences. Elle est en effet la logique de la quantité. C'est-à-dire qu'elle est la pre-

mière et la plus immédiate application des lois de la pensée aux choses extérieures.

Je crois que ce sont les sophistes, avant SOCRATE, qui, les premiers, ont considéré le problème d'existence. L'existence a toujours été un problème très important parmi tous les problèmes de la pensée mathématique, et elle demeure de même, maintenant encore, sans sa situation interchangeable, étant donné qu'il n'y a pas été répondu d'une manière assez satisfaisante. Ce fut, je crois, GORGIAS qui proposa l'argument suivant :

Rien n'existe ; si quelque chose existe, ce quelque chose ne peut être connu ; s'il existe, et connu, il ne peut être montré aux autres.

Comme l'esprit des sophistes est universellement relatif, l'argument ci-dessus n'est pas déterminé, c'est-à-dire qu'on ne peut pas comprendre si l'être existe ou non. Mais il est vrai que la question a déjà été considérée à ce moment.

SOCRATE a établi deux méthodes scientifiques : réfutation de l'erreur ou l'Ironie, et découverte de la vérité ou Mainentique. L'Ironie dirigée contre la présomption et le sophisme, résulte du contraste établi par SOCRATE entre l'idéal de la science et l'orgueilleuse ignorance de ses adversaires. C'est peut-être la méthode qui deviendra plus tard ce que nous appelons maintenant la démonstration négative (1).

La deuxième méthode scientifique élaborée par SOCRATE est une méthode positive : la découverte de la vérité.

La philosophie ancienne grecque réalisa son élan à travers SOCRATE jusqu'aux PLATON et ARISTOTE.

Les dialectiques des pensées, la théorie des idées de PLATON, la logique classique et la théorie des existences d'ARISTOTE, terminaient la première période d'histoire de la pensée mathématique.

Pour PLATON, il était au contraire de PYTHAGORE et regardait l'Idée comme le centre d'existence. Il considérait que dans la réalité éternelle, il y a quelque chose qui fonde la possibilité des genres, des types, des lois auxquelles le monde sensible est soumis. Il est l'idéal de l'homme, l'idéal de l'animal, mais ce n'est pas une idée abstraite et stérile, c'est la

(1) Voir notre chapitre III.

suprême réalité. Il est le modèle vivant, l'exemplaire éternel des choses. Ce modèle, selon PLATON, est l'Idée.

L'Idée de PLATON n'est pas seulement le principe de l'existence, elle est aussi le principe de la connaissance.

L'objet de la philosophie de PLATON c'est l'être, ARISTOTE l'a suivi. Il a appelé aussi la philosophie première, la science de l'être. A ce point de vue la théorie de l'existence serait une des plus importantes parties dans la philosophie ancienne. D'après PLATON c'est l'universel qui constitue l'être ; ainsi l'idée universelle de l'humanité est l'essence des différents hommes. Mais, pour ARISTOTE, le véritable être n'est point quelque chose d'universel. Pour PLATON donc, être, c'est Idée, et pour ARISTOTE, être c'est action.

Peut-être est-ce la différence essentielle de la pensée de PLATON et d'ARISTOTE.

Je veux diviser le temps après cette première période en deux grandes périodes selon ce que nous avons dit au premier paragraphe — c'est l'invention du calcul infinitésimal et l'invention de la théorie des ensembles.

C'est une chaîne entre le calcul, la continuité et l'infiniment petit. La fondation est basée sur l'infinitésimal. Il y a quelques conséquences curieuses de cette idée. Par exemple, je dis qu'il n'y a pas un moment suivant un autre moment. L'intervalle entre deux moments sera infinitésimal car il y a toujours un autre moment entre deux moments, si petit que soit l'intervalle entre eux. Cet énoncé est tout à fait analogue à ce que nous appelons la continuité des nombres réels. Entre deux nombres réels quelconques, il y a toujours un autre nombre réel entre eux ; et par conséquent, il y a toujours une infinité de nombres réels entre deux nombres réels quelconques. De la même manière, on peut énoncer qu'il y a toujours une infinité de moments entre deux moments.

Considérons encore le mouvement. Le mouvement est-il un changement de position ou un changement de l'état ? D'après l'idée de l'infiniment petit, quand un corps mouve tout ce qu'on peut dire est ceci : le corps a une place dans un instant, et a une autre place dans un autre instant. Nous nous servons ici du mot « autre » au lieu de « suivant » comme nous ne croyons pas qu'il y a un moment suivant. Par cette hypothèse, les sophistes anciens avaient dit que la flèche ne

mouve pas. Naturellement, c'est un paradoxe de la théorie de l'infinité.

Reprenons la théorie des ensembles.

Lorsque CANTOR publia ses idées sur la numération des nombres plus grands que l'infini, les nombres transfinis, le public mathématique eut une croyance défiante, parce qu'il crut d'abord qu'il y avait implicitement un paradoxe malgré qu'ils ne l'avaient pas trouvé. Cette théorie de CANTOR depuis une vingtaine d'années est devenue classique, à la fois pour le public mathématique et pour le public philosophique.

Au point de vue philosophique et logique, nous avons les thèses de COUTURAT, de EVELLIN, de M. RUSSELL et nous avons aussi « les polémiques sur le transfini » discutées par MM. BOREL, LEBESQUE et HARDAMARD trouvées dans la *Revue de Métaphysique et de Morale* (1899-1900). Quant au point de vue mathématique, M. SIERPINSKI a écrit un livre, *Sur les Nombres transfinis*, contenant un exposé extrêmement élégant et complet. Parmi les singularités des nombres transfinis, le problème de trichotomie, le problème du continu et les paradoxes cantorien, par exemple le paradoxe de M. RUSSEL, et le paradoxe de M. RICHARD, sont les fondamentaux.

Nous allons faire maintenant une petite esquisse sur quelques problèmes de la philosophie mathématique d'aujourd'hui.

Nous commencerons par les idées primitives de PEANO. Les trois idées primitives de PEANO sur la théorie des nombres entiers absolus (ou positifs) sont les suivantes :

zéro, nombre, le suivant de.

Par le mot *le suivant de*, il a défini que c'est un nombre le suivant d'un autre nombre selon l'ordre naturel, c'est-à-dire le suivant de *zéro* est *un*, le suivant de *un* est *deux* et ainsi de suite. M. A. PADOA a réduit ces idées de trois à deux (XVI. 1) :

nombre, le suivant de,

et il a énoncé une théorie analogue algébrique des nombres entiers positifs et négatifs moyennant les trois idées suivantes :

nombre, le suivant de, le symétrique de.

Nous ne voulons pas critiquer maintenant ni la théorie de PEANO, ni la théorie de PADOA ; mais une chose est bien

claire : c'est que ces théories sont toutes établies sur deux idées fondamentales :

nombre, ordre ;

puisque les opérations *le suivant de* ou bien *le symétrique de* sont deux moyens d'organiser l'ordre des nombres. Donc la question revient au problème général de l'ordre du nombre.

Le premier problème dans la théorie des ensembles relatif à la théorie des ordres, est la théorie des nombres cardinaux et la théorie des nombres ordinaux ⁽¹⁾.

On commence par ordonner un ensemble, c'est-à-dire par poser une règle d'après laquelle pour deux de ses éléments l'un doit suivre l'autre. Considérons, par exemple, un ensemble de fruits composé de cinq pommes et trois bananes ; nous pouvons les ordonner en numérotant chacun des fruits avec un nombre entier, par exemple :

pomme,	pomme,	pomme,	pomme,	pomme,		
1	2	3	4	5		
		banane,	banane,	banane,		
		6	7	8		

nous voyons cet ensemble de fruits ordonné comme les huit nombres entiers.

En 1904 E. ZERMELO énonça un théorème connu comme le théorème de ZERMELO en même temps qu'un axiome, l'axiome au choix. Il dit que tout ensemble M dont les éléments sont des ensembles P non vides et sans éléments communs deux à deux, il existe au moins un ensemble N qui contient un élément et un seul de chaque P qui appartient à M. Cet axiome a donné lieu à un vif échange d'opinions entre les mathématiciens et les philosophes, car il y a des hommes qui affirment ne pas comprendre ce que cela veut dire. Pour cet axiome la difficulté est que le sens de l'existence d'un ensemble des ensembles n'est pas très clair et alors les idéalistes et les réalistes ont des opinions différentes ⁽¹⁾.

L'étude précise du théorème de ZERMELO et de tous les autres paradoxes conduit les mathématiciens à faire certaines constatations qui peuvent être nouvelles, mais le sont

(1) Voir notre chapitre IV.

moins pour les philosophes qui ont étudié la logique moderne de FREGE, PEANO et M. RUSSELL.

Dans la théorie des nombres, les définitions des opérations fondamentales : l'addition ou la somme, et la multiplication ou le produit sont plus importants même que ses propriétés. Tout le calcul des mathématiques est fondé sur eux. Pour les ensembles, c'est évidemment aussi important. Nous définissons la somme des ensembles des éléments, l'ensemble formé de tous ceux et seulement ceux des éléments qui appartiennent à l'un, au moins, des ensembles donnés et nous appelons le produit des ensembles, l'ensemble de tous les éléments communs à tous ces ensembles. Ainsi, si nous désignons par (+) pour la somme et par (.) pour le produit comme nous faisons pour le calcul ordinaire des nombres, nous voyons que ses propriétés sont presque les mêmes que celles des nombres ordinaires, c'est-à-dire qu'elles sont commutatives, associatives et distributives. Soient A, B et C trois ensembles quelconques, nous avons par définition les lois suivantes :

$$\begin{aligned} A+B &= B+A, \\ A.B &= B.A, \\ C(A+B) &= C.A+C.B, \\ (A.B)C &= A.(B.C). \end{aligned}$$

Mais il y a, d'autre part, des propriétés tout à fait différentes, par exemple, on a pour tout ensemble E,

$$\begin{aligned} E+E &= E \\ E.E &= E. \end{aligned}$$

Ce qui permet de simplifier les formules contenant des termes semblables ou de puissance d'ensemble.

De plus, pour les types d'ordre des ensembles, elles sont encore différentes.

Un ensemble donné E sera dit ordonné si l'on peut faire la convention suivante : si a et b sont deux éléments distincts de E, un de ces éléments est regardé comme le suivant de l'autre, ce qui exprime en écrivant $b > a$, pour désigner que b est le suivant de a. Cette propriété doit se vérifier à la propriété transitive, c'est-à-dire que les relations $a < b$ et $b < c$ entraînent toujours la relation $a < c$.

On dira que deux ensembles ordonnés E et F sont semblables s'il existe entre leurs éléments une correspondance

conservant les relations d'ordre entre les éléments correspondants. Si a_1 et b_1 sont deux éléments de E, et a_2 et b_2 respectivement leurs correspondants dans l'ensemble F, la relations $a_1 < b_1$ entraîne toujours la relation $a_2 < b_2$ si E et F sont semblables.

Alors, nous divisons en classes tous les ensembles ordonnés, en rangeant dans une même classe tous les ensembles semblables entre eux, on dit que les ensembles dans une même classe ont le même type d'ordre.

Je prends un exemple, le plus simple, pour le type d'ordre. Je dis : un ensemble est un type d'ordre w qui est ordonné et jouit des trois propriétés suivantes :

- A. Il a un premier élément ;
- B. Il n'a pas de dernier élément ;
- C. Toute coupure y donne un saut.

L'ensemble infini des nombres le plus simple de type w est celui de la suite des nombres naturels, le premier élément auquel peut être pris un nombre fini quelconque, n par exemple,

$$n, (n+1), (n+2) \dots (n+m) \dots$$

Si l'on exprime l'ordre par le signe $<$, comme on a considéré tout à l'heure, on a alors :

$$n, < (n+1) < (n+2) < \dots < (n+m) < \dots$$

Il est bien clair que ce type d'ordre w est invariable quand on y ajoute un élément avant la suite, comme on le voit sans peine, le type d'ordre de l'ensemble ordonné,

$$(n-1) < n < (n+1) < \dots < (n+m) < \dots$$

est encore w car il satisfait aussi aux trois conditions ci-dessus. Nous pouvons alors exprimer ce fait par la relation :

$$1 + w = w,$$

c'est-à-dire le type d'ordre w est invariable quand on y ajoute un élément avant.

Cependant, pour la somme $w+1$, on obtiendra l'ensemble :

$$n < (n+1) < (n+2) < \dots < (n+m) < \dots < 1,$$

dont le type d'ordre est distinct de w puisqu'il a un élément dernier qui nous donne une contradiction à la condition (B). Nous exprimons ce fait naturellement par :

$$w+1 \neq w,$$

et par conséquent :

$$w+1 \neq 1+w.$$

Tout ceci nous montre que les lois fondamentales ordinaires ont quelquefois des valeurs différentes dans la nouvelle théorie.

Nous savons aussi que les concepts de la limite et de la continuité étant deux de celles qui sont les plus importantes en mathématiques, se sont trouvées de plus en plus généralisées dans le sens, d'après cette nouvelle théorie des ensembles. Le calcul différentiel et intégral, et surtout les mathématiques supérieures dépendant de cette notion. La définition classique actuelle de la continuité est établie d'après la théorie de CAUCHY. Pour CAUCHY, une fonction $f(x)$ est dite continue pour la valeur x_0 si, quel que soit le nombre positif ϵ , on peut trouver un nombre $n(\epsilon)$ tel que l'inégalité

$$h \leq n$$

entraîne

$$f(x_0+h) - f(x_0) \leq \epsilon$$

et une fonction $f(x)$ est dite continue dans un intervalle (a, b) si la correspondance entre ϵ et n peut être choisie indépendamment du nombre x_0 quelconque dans l'intervalle (a, b) .

Mais, d'après la théorie des ensembles, un intervalle peut être remplacé par un ensemble des points sur cet intervalle, dont un nouveau concept de continuité sur un ensemble doit être établi. Ainsi M. DENJOY a défini les fonctions approximativement continues. Pour M. DENJOY une fonction est dite approximativement continue en un point x_0 si, quel que soit le nombre positif ϵ , l'ensemble $E(x_0, \epsilon)$ des points x donnant lieu à l'inégalité

$$f(x) - f(x_0) < \epsilon$$

est d'épaisseur égale à un ϵ en x_0 , d'où il a défini l'épaisseur d'ensemble E en x_0 par la limite du quotient par la longueur i , un intervalle contenant le point x_0 de la partie de l'ensemble E situé sur l'intervalle i , et dont la longueur de i tend vers zéro (VI. 3).

En résumé, il est évident que la philosophie mathématique a subi un grand changement et qu'elle a réalisé un grand progrès d'après cette nouvelle théorie des ensembles.

CHAPITRE II

SUR LA DEFINITION

Qu'est-ce qu'une bonne définition ? Pour le philosophe ou pour le mathématicien, c'est une définition qui s'applique à tous les objets définis et ne s'applique qu'à eux. Une définition qui satisfait seulement à cette condition est souvent plus idéale et plus difficile à comprendre. Une définition logiquement complète peut n'être pas bonne pour les lecteurs, particulièrement une définition mathématique. Par exemple, nous sommes dans la classe de géométrie, le professeur dicte : « Le cercle est le lieu des points du plan qui sont à la même distance d'un point intérieur appelé centre ». Le bon élève écrit cette phrase sur son cahier, le mauvais élève y dessine des bonshommes ; mais ni l'un ni l'autre n'a compris ; alors le professeur prend la craie et trace un cercle sur le tableau noir. Tout le monde comprend alors. Ainsi, une définition qui est bonne au sens du mot peut n'être pas bien comprise. Pour nous, donc, une bonne définition doit être logique et facilement comprise par les lecteurs ou auditeurs à la fois. Le mot « comprendre » prend une grande importance dans ce cas.

Les définitions qui seront le mieux comprises par les uns ne seront pas celles qui conviendront aux autres : cela dépend toujours de la connaissance personnelle et du degré d'instruction. Mais, en principe, la définition la plus claire en idée et la plus simple en forme est la meilleure. C'est pour cette raison qu'on ne se satisfait pas quelquefois en mathématiques ou en sciences naturelles d'une définition et qu'on en cherche une autre moins abstraite et plus compréhensible pour la remplacer. Le progrès de l'intégration

dont j'ai parlé au chapitre premier par exemple, est fondé sur les corrections successives de sa définition.

1. -- L'arbre de Porphyre

Lorsqu'on veut classer un ensemble de choses ou un ensemble d'objets quelconques, il est facile de choisir un sous-ensemble de cet ensemble qui est restreint par une ou une suite de propriétés caractéristiques, comme une classe, et tous les autres objets qui n'ont pas ces propriétés, sont considérés comme appartenant à une autre classe. Toute la classification de cette sorte est alors restreinte par la règle suivante : elle ne doit pas laisser de résidu. Tous les objets de l'ensemble original doivent être classifiés dans une de ces classes.

Nous employons ici le mot *classe* au lieu de *ensemble* en regardant cet ensemble comme un individu.

Ce modèle de la classification est souvent employé par les logiciens et les mathématiciens sous le nom de *Arbre de Porphyre*, d'après le philosophe ALEXANDRIN du troisième siècle Porphyre. Pour démontrer cette méthode de la classification, nous allons considérer la classification du point de vue de l'ensemble de toutes les substances du monde. Un sous-ensemble de cet ensemble peut être choisi dans l'ensemble de toutes les substances matérielles, formant ainsi une classe dite A_1 par exemple. Toutes les substances qui n'appartiennent pas à A_1 , c'est-à-dire qui ne sont pas matérielles, forment une autre classe dite classe « non- A_1 » ou bien B_1 tout simplement. De la même façon, on peut choisir certains objets (on dit aussi des objets d'un ensemble, les éléments de cet ensemble), de la classe A_1 qui possèdent certaine propriété spéciale, organique par exemple, dans une classe dite A_2 , et tous les autres objets qui appartiennent à A_1 mais n'appartiennent pas à A_2 forment une classe dite « non- A_2 » ou bien tout simplement la classe B_2 . Ainsi, nous pouvons obtenir les classes $A_1, A_2... A_i$, et $B_1, B_2... B_i$, et nous pouvons avoir l'Arbre de Porphyre, le tableau suivant :

Ceci nous donne alors :

$$(2) \quad A_i c A_{i-1} c \dots c A_2 c A_1 c A_0$$

Et,

$$\begin{array}{ll} \text{comme } A_0 = A_1 + B_1 & \text{donc, } A_0 - A_1 = B_1 \\ A_1 = A_2 + B_2 & A_1 - A_2 = B_1 + B_2 \\ \dots & \dots \\ A_i = A_{i-1} + B_{i+1} & A_0 - A = B_1 + B_2 + \dots \\ & + B_{i+1} \end{array}$$

Nous désignerons la somme $(B_1 + B_2 + \dots + B_i)$ par B_i , alors

$$A_0 - A_i = B'_i$$

qui définit une classe se composant de tous les éléments de A_0 qui n'appartiennent pas à A_i . La distinction entre la classe B_i et B'_i qui sont liées par la relation

$$B'_i = B_1 + B_2 + B_3 + \dots + B_i$$

est très importante.

A l'aide de la formule ainsi obtenue, il est aisé de voir que si l'on avait déjà défini deux classes consécutives A_{i-1} et A_i par exemple, une classe de B qui a le même indice que le A ayant le plus grand indice, c'est-à-dire B_i , est bien définie par l'extraction des éléments A_i de A_{i-1} . Mais il faut remarquer ici que les définitions de A_{i-1} et A_i sont indépendantes de B_i .

D'une manière plus générale, deux de ces trois classes B_i , A_i et A_{i-1} sont définies à l'avance ; l'autre, celle qui reste, est définie aussi ; car il y a relation linéaire entre elles, donnée par la formule (1).

Une condition essentielle pour qu'une telle classification soit raisonnable est que, dans chaque classe de A et B , il y ait au moins un élément ; sinon, par exemple la classe B_i est vide, la classification n'est pas nécessaire pour A_{i-1} , parce que dans ce cas la classe A_i est de même que la classe A_{i-1} . Nous appelons cette propriété essentielle de la classification de PORPHYRE : la *propriété aliquote* de la classification.

2. -- Le complémentaire d'une classe

Par définition nous disons que l'ensemble de tous les éléments de la classe B_i est le complémentaire de l'ensemble

de tous les éléments de la classe A_i par rapport à la classe A_{i-1} ; ou bien, plus brièvement, nous disons que la classe B_i est la classe complémentaire de la classe A_i . Pour la convenance, nous pouvons regarder la classe B de comme une opération synonymée à l'opération *le complémentaire de*, et nous écrivons B est le complémentaire de A sous la forme suivante :

$$B=c(A),$$

en général,

$$B_i=c(A_i)=A_{i-1}A_i.$$

Etant donné une classe A_i nous appelons le domaine de la classe A_i , la classe qui renferme tous les éléments de la classe A_i et son complémentaire la classe B_i sous une certaine classification donnée.

Donc, une classe a un même domaine que son complémentaire. Car A_{i-1} est le domaine à la fois de la classe A_i et de la classe B_i .

Par conséquent, un objet d'un domaine A_{i-1} appartient, nécessairement, à l'une des classes A_i et B_i .

Nous disons qu'un domaine est libre quand il peut être remplacé par un domaine plus étendu que lui. Ce cas est évidemment possible, car un complémentaire d'une classe A_i peut être choisi par rapport à la classe A_{i-1} d'où l'on a :

$$\text{non-}A_i=B_i=A_{i-1}-A_i.$$

Alors c'est B_i qui est le complémentaire de A_i . Mais il peut être choisi par rapport à la classe A_{i-2} d'où :

$$\text{non-}A_i=B_i+B_{i-1}=A_{i-2}-A_i \text{ (Tableau I).}$$

C'est la somme (B_i+B_{i+1}) qui est le complémentaire. D'une manière plus générale, il peut être choisi par rapport à toute la classe A_j où $j < i$; c'est-à-dire que toute la somme de la forme $(B_i+B_{i-1}+\dots+B_{i-\epsilon})$ ou $\epsilon=1, 2, 3\dots (i-1)$, peut être choisie comme complémentaire de la classe A_i .

Mais, dans ce cas, il y a toujours un et un seul des complémentaires qui est le plus petit et contenu dans tous les autres complémentaires, c'est la classes A_{i-1} , car dans ce cas le complémentaire B_i est un sous-ensemble de tous les ensembles complémentaires, puisque

$$B_i \subset (B_i+B_{i-1}+\dots+B_{i-\epsilon})$$

pour toute la valeur de

$$\epsilon=1, 2, 3, \dots, (i-1).$$

Cette classe A_{i-1} est dite alors le plus petit domaine de la classe A_i dans la classification donnée.

Nous remarquons maintenant que certain domaine n'est pas libre ; il ne peut pas être remplacé par un autre domaine. Un tel domaine sera dit fixe.

Pour distinguer les deux sortes de domaines, prenons l'exemple suivant : je dis que la classe des *hommes-savants* a un domaine libre ; ici, le trait d'union signifie hommes-savants, c'est un nom composé, c'est-à-dire que je suppose que le complémentaire de cette classe est l'ensemble des éléments non-hommes savants. Le complémentaire peut renfermer seulement les hommes non-savants, alors le domaine de la classe est l'ensemble de tous les hommes. D'autre part, il peut renfermer la somme de tous les hommes non-savants et tous les animaux non-hommes ; alors le domaine de la classe est l'ensemble de tous les animaux, et ainsi de suite.

Mais, au contraire, le domaine de la classe des hommes savants est fixe ; c'est l'ensemble de tous les hommes. Car dans ce cas la classe B de la classe des hommes savants et la classe des hommes non-savants.

Puisque les classes A_i et B_i sont toujours exclues entre elles, il n'y a aucun élément qui appartient à la fois à l'une et à l'autre. On écrit symboliquement ce fait sous la forme suivante :

$$(A_i B_i) = 0.$$

Nous mettons ici le produit de deux classes (ou ensembles), l'ensemble de tous les éléments communs aux deux ; et l'égalité ci-dessus signifie donc que la classe des éléments communs aux classes A_i et B_i est une classe vide (ou une classe nulle). Une classe nulle est une classe qui n'a aucun élément (cette formule exprime en effet le principe du tiers exclu de la logique que nous allons rencontrer au chapitre prochain).

Car le produit des ensembles est évidemment distributif d'après sa définition, on peut substituer A_i par la somme $(A_{i+1} + B_{i+1})$, on a alors la relation :

$$(A_{i+1} + B_{i+1}).B_i = 0$$

d'où il est nécessaire que :

$$(A_{i+1}.B_i) = 0,$$

et

$$(B_{i+1}.B_i) = 0.$$

En général, on a les formules suivantes :

$$(3) \quad (A_i.B_j)=0$$

pour toute la valeur de i et j ou $j \geq i$; et

$$(4) \quad (B_i.B_j)=0$$

pour toute la valeur de i et j ou $i \neq j$.

Une formule correspondant à la formule (4) pour deux ensembles A_i et A_j en est tout à fait différente. D'après la relation (2) il est évident que les éléments communs aux classes A_0 et A_1 sont tous les éléments contenus dans la classe A_1 . Ainsi que les éléments communs aux deux classes A_i et A_j quelconques sont tous les éléments contenus dans la classe A_j , si $i \leq j$. On a alors :

$$(5) \quad (A_i A_j)=A_j \quad (i \leq j)$$

Par exemple, soit la classe A_0 l'ensemble de tous les hommes, la classe A_1 l'ensemble de tous les hommes vivants et enfin la classe A_2 l'ensemble de tous les hommes vivants européens. Cela étant supposé, il est clair que la classe B_1 est l'ensemble de tous les hommes morts et la classe B_2 est l'ensemble de tous les hommes vivants non-européens. La relation (3) exprime que les européens vivants ne sont pas morts, et enfin la relation (5) exprime que tous les européens vivants sont vivants.

3. -- Proposition absurde

Nous commencerons par le caractère d'une proposition. La logique classique définit une proposition de la façon dont elle énonce un jugement qui renferme trois éléments : deux idées et une affirmation. Le sujet et l'attribut sont les idées et un verbe appelé copule représente l'affirmation. Au point de vue de la classe dont nous venons de parler, les deux idées peuvent être considérées comme deux classes d'où un individu serait considéré comme une classe comprenant un seul élément : et l'affirmation énoncée la relation entre les deux classes sous une certaine classification donnée implicitement ou explicitement.

Après nous être servi de cette idée, nous disons qu'une proposition sera non-absurde si elle satisfait aux conditions suivantes :

1. Les classes énoncées dans cette proposition doivent exister.

2. Le domaine de cette proposition doit être unique.

3. Le domaine de cette proposition unique doit être, au plus, égal à ce que nous avons proposé à l'avance.

Interprétation :

Pour qu'une proposition soit non-absurde, il faut tout d'abord que le sujet et l'attribut ne soient pas l'un et l'autre des pseudo-classes ; c'est-à-dire qu'il faut que les deux idées de la proposition existent, car si l'une d'elles n'existe pas, la proposition n'a aucun sens. Une proposition, par exemple : « table est carré rond » est absurde, puisque les deux classes que concerne cette proposition sont respectivement la classe des tables et la classe des substances carrées rondes dont cette dernière est une pseudo-classe. Par une pseudo-classe, nous entendons une classe dont les éléments n'ont pas la possibilité d'existence. Elle est différente d'une classe nulle ; par exemple, l'ensemble des hommes organiques coïncide avec son domaine : l'ensemble des hommes, car tous les hommes sont organiques, alors son complémentaire, l'ensemble de tous les hommes non-organiques, est un ensemble vide. Mais pour un ensemble des substances carrées rondes, c'est autre chose, car le concept carré rond n'existe pas, il est un concept contradictoire. Donc si les éléments d'un ensemble ont des possibilités d'exister, mais si l'ensemble ne les renferme pas, l'ensemble est vide. Au contraire, si des éléments définis pour un ensemble n'ont pas de possibilité d'exister, l'ensemble est pseudo ⁽¹⁾.

Si les deux domaines des classes d'une proposition définies par le sujet et l'attribut coïncident, nous disons que le domaine de cette proposition est unique, et nous disons aussi que le domaine unique est le domaine de proposition. Si l'un des domaines est libre, nous pouvons le choisir le plus grand possible, tel qu'il puisse coïncider avec l'autre.

Si une proposition ne doit pas remplir cette condition,

(1) Le sens, pseudo-classe définie ici, n'est pas le même que celui défini par Padoa. Voir (XVI-2).

c'est-à-dire si elle n'a pas un domaine, nous disons qu'elle est absurde.

L'exemple le plus frappant introduit souvent par les logiciens est celui-ci : *Socrate est (ou n'est pas) égal à un angle droit* (XVIII. 1). Le premier domaine défini par le sujet *Socrate* est un domaine libre, on peut choisir l'ensemble des hommes, ou bien l'ensemble de toutes les substances ; mais le domaine défini par l'attribut est un domaine fixe ; c'est la classe renfermant tous les angles droits et les angles non-droits. Donc, le dernier domaine étant un domaine fixe formé de tous les angles, ne peut pas alors coïncider avec l'autre domaine. La proposition donnée n'a pas de domaine unique et elle est absurde.

Nous appelons une telle proposition absolument absurde en distinguant avec l'absurdité prochaine.

Etant donnée une proposition, un domaine de proposition étant proposé en même temps implicitement ou bien explicitement, ce domaine peut ne pas coïncider avec le domaine unique que nous avons trouvé. Dans ce cas, nous disons aussi que la proposition est absurde.

Je vais expliquer cet énoncé au moyen d'exemples, dans deux cas différents.

A. — Cas d'une proposition absurde dans un domaine proposé, mais non-absurde, ayant une valeur logique V dans un autre domaine.

Si une proposition est absurde, elle n'a pas de valeur logique, autrement elle a une valeur V quand elle est vraie, et a une valeur F quand elle est fausse.

Supposons qu'il y ait une conférence ou bien une conversation entre nos amis. Notre conférence porte sur le sujet des hommes savants, leur caractère, leurs habitudes, etc. Si l'un de nos amis énonce une proposition comme celle-ci : *Socrate est un homme*, tout le monde va rire, car cette parole n'a aucun sens dans notre conférence. Pourquoi une telle proposition n'a-t-elle pas de sens dans notre conversation ? Parce que le domaine de notre conversation est la classe des hommes savants : tout ce que l'on peut discuter dans notre société ne doit pas sortir de ce domaine ; mais le domaine de proposition proposé par notre ami est au moins une classe renfermant tous les hommes qui est naturellement plus grande que la classe des hommes savants et ne

peut pas coïncider avec elle. Donc cette proposition n'a pas de valeur et par conséquent, est absurde par rapport au domaine proposé.

Mais cette proposition va être non-absurde après un changement du domaine proposé par un autre domaine suffisamment large au moins égal au plus petit domaine unique de la proposition donnée. La même proposition : *Socrate est un homme*, aura une valeur V par rapport au domaine renfermant tous les animaux, par exemple, quand on demande si Socrate est un homme ou un animal.

Une proposition peut se situer à la frontière des propositions absurdes et des propositions non-absurdes. Elle est une proposition vraie, mais elle a ordinairement un sens mauvais. Si nous disons à notre camarade : *Tu es un homme*, notre domaine proposé est : *hommes* ; car nous sommes tous des hommes, bien entendu. Cependant, bien que cette proposition soit vraie de toute évidence, elle ne saurait nous donner satisfaction. C'est simplement parce que le domaine proposé est égal au domaine de proposition.

B. — Cas d'une proposition absurde dans un domaine proposé mais non-absurde ayant une valeur logique F dans un autre domaine.

C'est encore le cas quand le domaine proposé est plus petit que le domaine de proposition. Supposons encore que nous allons parler au sujet des hommes-savants.

La proposition *Socrate est un angle droit* a un domaine plus grand que le domaine *hommes-savants* car dans ce domaine il doit renfermer *Socrate* et *angle droit* en même temps. Donc, cette proposition est absurde par rapport à notre domaine.

Mais si l'on change le domaine *hommes-savants* en la classe de toutes les substances, c'est donc une proposition non-absurde, mais elle est fausse.

Il faut distinguer ici que les deux propositions : *Socrate est égal à un angle droit* et *Socrate est un angle droit* sont tout à fait différentes logiquement, car l'une a déjà implicitement affirmé que Socrate est un angle, mais tout ce que nous voulons considérer ici c'est si Socrate est angle droit ou non, donc c'est une proposition toujours absurde.

Une proposition qui ne remplit pas cette dernière condition est dite relativement absurde, car elle peut être non-absurde après un changement de domaine proposé.

4. -- Définition positive et définition négative

Il est souvent d'usage de classer les définitions de classes en trois modes (XIX. 1) :

(i) Une classe peut être définie d'après une propriété générale : telles sont presque toutes les définitions mathématiques. Elles sont ordinairement données sous la forme : x appartient à la classe A si une certaine propriété de x est vraie.

(ii) Le second mode de définition est par récurrence. On dit que $f(a)$ une certaine fonction de a appartient à la classe A si a lui appartient. Par exemple, je dis que le frère de a est un frère, donc tous les frères forment une classe bien définie.

(iii) La troisième méthode de définition d'une classe, c'est l'énumération. Nous pouvons énumérer tous les membres d'une classe qui sera définie. Ainsi je dis que la classe A que je vais définir c'est M. Jean, M. Robert et M. Maurice. Mais cette sorte de définition ne peut s'appliquer qu'à une classe renfermant des éléments en nombres finis.

De ces trois sortes de définitions M. B. RUSSELL a appelé la définition par compréhension pour la première et la seconde, et la définition par extension pour la troisième. Il est évident que la définition par extension ne peut s'appliquer qu'à une classe des éléments finis et elle peut toujours être réduite en une définition par compréhension. Mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

Une autre façon de classer les définitions des classes que nous voulons considérer ici, sera tout à fait différente de celle exprimée ci-dessus. C'est au point de vue de la classification de PORPHYRE.

Pour la définition elle-même nous disons souvent qu'elle est une opération qui consiste à analyser la compréhension d'une idée. La définition de définition comme celle-ci ne peut comprendre qu'une partie des définitions, car il y a la définition qui définit une classe et n'analyse pas la compréhension de cette classe que nous allons définir. Je ne crois pas que cette définition soit directe ou bien indirecte comme COUTURAT l'a spécifié (V. 3). Car elle ne nous affirme rien

des caractères des objets de la classe définie. Quelle est la définition que nous voulons considérer ? Ce n'est pas autre chose que la définition de la classe B dans l'Arbre de PORPHYRE, définie à l'aide de son complémentaire de la classe A.

Nous avons dit que si l'on avait défini les classes A_{1-1} et A_i de l'Arbre de PORPHYRE, la classe B_i sera bien définie en disant que B_i est le complémentaire de la classe A_i par rapport à la classe A_{1-1} , à la seule condition que les définitions de A_{1-1} et A_i soient indépendantes de B_i . Symboliquement, elle est définie par l'égalité suivante :

$$B_i = A_{1-1} - A_i$$

où A_{1-1} et A_i sont deux classes définies indépendantes de B_i . Dans cette sorte de définition, nous ne connaissons aucune propriété des éléments de B_i sauf qu'ils n'appartiennent pas à A_i . Nous disons qu'une telle définition est une définition négative ; car elle est toujours explicitement ou implicitement une proposition négative ; tandis que, au contraire, la définition qui affirme les compréhensions de la classe qu'on veut définir, est dite : la définition positive.

Les distinctions les plus claires entre ces deux modes de définitions sont les points suivants :

i. Définition négative composée toujours d'une proposition négative, tandis que la définition positive est composée toujours de propositions positives.

Il faut remarquer que la définition négative est souvent composée par deux propositions : l'une est la définition négative propre sous la forme : *B est le complémentaire de A* ; l'autre est une proposition positive auxiliaire qui est la définition de la classe A. La définition : *les non-européens sont les hommes qui ne demeurent pas en Europe* est négative et équivalente à une définition négative propre : *les non-européens sont les éléments du complémentaire des européens*, c'est-à-dire : *les hommes qui ne sont pas européens, sont non-européens*. Sa définition auxiliaire positive est : *les européens sont les hommes qui demeurent en Europe*.

ii. La définition négative n'affirme aucun caractère des éléments de la classe définie, et par conséquent, elle dépend toujours d'une définition positive qui définit son complémentaire.

Ainsi, une définition négative ne nous donne aucun ca-

ractère des éléments de la classe que nous allons définir. On peut savoir seulement quelques propriétés de son complémentaire, défini par une définition auxiliaire donnée en même temps ou non, et c'est de cette définition auxiliaire qu'elle doit dépendre.

Les définitions négatives jouent un grand rôle dans les sciences mathématiques et même dans l'usage ordinaire.

5. -- L'existence du complémentaire d'un complémentaire

Nous avons défini que la classe Bi est le complémentaire de la classe Ai par rapport à son domaine A_{1-1} ; d'où nous supposons que A_{1-1} et Ai doivent être définies indépendamment de la classe Bi , l'une et l'autre.

Considérons le complémentaire de Bi . Est-ce que l'on peut dire que Ai soit le complémentaire de Bi ? Par notre argument ci-dessus, cette question ne se pose que si Bi peut être définie ou non par une définition autre que sa définition négative qui dépend de A_{1-1} et Ai , mais positive équivalente à cette définition négative. Reprenons l'égalité (1),

$$(1) \quad Bi = c(Ai) = A_{1-1} - Ai.$$

Par un calcul ordinaire, il est facile de voir que

$$Ai = A_{1-1} - Bi,$$

c'est-à-dire,

$$(6) \quad Ai = c(Bi).$$

Mais si la classe Bi ne peut être définie que par l'égalité (1), la formule (6) devient :

$$Ai = c(c(Ai)).$$

Ceci nous indique que Ai ne peut pas être définie par son complémentaire la classe Bi . Par conséquent pour que l'égalité (4) ait un sens il faut et il suffit que la classe Bi soit définie indépendamment de Ai , c'est-à-dire que Bi a une définition positive équivalente à sa définition négative donnée.

Il en résulte donc que l'on peut déduire l'égalité (4) de l'égalité (1) si et seulement si, étant donné une définition négative, on peut trouver une définition positive équivalente. Ce travail est en général très difficile et même quelquefois presque impossible. Cependant, il est nécessaire et particu-

lièrement important en mathématiques, car une définition négative n'est pas évidemment une définition bien comprise.

Un tel travail équivaut logiquement à trouver une condition nécessaire et suffisante telle qu'un objet doit appartenir à la classe définie par une définition négative. Nous laissons de côté cette question et nous la discuterons au paragraphe prochain.

S'il existe un objet au moins d'un domaine d'une classe non-vide autre que cette classe, c'est-à-dire si le complémentaire d'une classe n'est pas une classe vide, nous disons que la classe jouit d'une propriété aliquote, et qu'elle est une partie aliquote (ou partie propre) de son domaine. Ainsi, si une classe est aliquote, son complémentaire a également cette propriété.

Nous disons qu'une définition est absurde si son énoncé est absurde ou bien si la classe définie n'est pas aliquote.

Donc, une classe définie non-absurdement ne peut pas coïncider avec son domaine, ni être une pseudo-classe. Par exemple, la définition : *La classe A est une classe des substances carrées rondes* est absurde car la proposition est absurde ; la classe définie est une classe pseudo, dont l'élément n'existe pas. La définition : *Les hommes sont des animaux organiques* est aussi absurde même si la proposition est non absurde, car la classe définie *Animaux organiques* n'est pas aliquote, dont son complémentaire *animaux non-organiques* est une classe vide.

6. -- La condition nécessaire et suffisante

Nous disons qu'une condition est nécessaire pour qu'un objet appartienne à certaine classe, si tous les éléments de cette classe vérifient cette condition sans aucune exception. Donc, l'extension de la classe des objets qui vérifient une condition nécessaire pour qu'un objet appartienne à une classe A, est au moins égale à l'extension de A. Elle est plus grande en général.

Inversement, nous disons qu'une condition est suffisante pour qu'un objet appartienne à une classe A, si un objet vérifiant cette condition donnée, il appartient à la classe A.

Donc, la compréhension de la classe de tous les objets vérifiant une telle condition est plus grande, au moins égale à celle de la classe A.

Désignons la classe définie par une condition nécessaire et la classe définie par une condition suffisante pour qu'un objet appartienne à une classe A, respectivement par N et S. D'après tout ce qui précède, nous aurons logiquement :

$$AcN \text{ et } ScA.$$

Par conséquent,

$$ScAcN.$$

C'est-à-dire que :

$$\begin{array}{ll} x \text{ est un A,} & x \text{ est un N,} \\ y \text{ est un S,} & y \text{ est un A.} \end{array}$$

Si $N=P$, c'est-à-dire si une condition est à la fois nécessaire et suffisante, il est clair que :

$$N=P=A.$$

Donc, au lieu d'une définition de certaine classe, on peut toujours insister sur une nouvelle définition qui est définie par une condition nécessaire et suffisante pour que la classe existe, si cette condition avait été trouvée. Puisqu'une telle condition peut être toujours écrite sous la forme : *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un objet appartienne à une classe A est P*, où P est une proposition trouvée représentant la condition. Cet énoncé peut être transformé en une définition nouvelle en disant que la classe A est une classe des objets satisfaisant P.

Tout ce que nous venons de dire nous assure à l'avance que nous pouvons trouver une condition nécessaire et suffisante ; sinon, cette transformation est faillible.

Donc, on peut changer une définition par une autre, si l'on sait une condition nécessaire et suffisante correspondante. La définition ainsi obtenue est souvent positive, parce qu'elle est une proposition qui affirme une nature caractéristique de la classe que nous voulons définir. Alors, une définition négative peut être remplacée par une définition positive équivalente, si, et seulement si, nous pouvons trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'un objet soit dans la classe.

7. -- Hypothèse de l'existence de la définition positive

Etant donnée une définition négative, le travail pour trouver une définition positive équivalente est souvent très difficile et quelquefois presque impossible. Je dis qu'il est presque impossible, car nous ne savons pas s'il est possible ni s'il est impossible ; et nous n'avons pas encore une méthode fixe pour résoudre cette question comme les mathématiciens calculent les racines d'une équation de deuxième ordre. Mais quelle que soit sa difficulté les mathématiciens la cherchent sans cesse et la regardent comme un problème des plus intéressants et d'une importance plus grande, que beaucoup de définitions négatives qu'on avait considérées une première fois comme impossible à transformer en une définition positive ; c'est-à-dire de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la classe existe, a été résolu plus tard, malgré une infinité de difficultés.

Je veux donner ici quelques exemples pour démontrer cette assertion.

Exemple I :

DÉFINITION. -- Les nombres impairs sont les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 2.

Cette définition est négative. D'après l'énoncé ci-dessus elle est équivalente aux deux définitions suivantes :

a) *Une définition négative propre.*

Les nombres impairs sont le complémentaire des nombres pairs par rapport à tous les nombres entiers (ou bien : les nombres entiers qui ne sont pas pairs, sont impairs).

b) *Une définition positive auxiliaire.*

Les nombres entiers qui sont divisibles par 2, sont pairs,

Si cette définition négative des nombres impairs peut être transformée en une définition positive, on peut alors énoncer que les nombres pairs sont le complémentaire des nombres impairs ; car dans ce cas les nombres impairs sont bien définis indépendants des nombres pairs. Mais, sinon, il n'est pas possible de dire que les nombres pairs sont complémentaires des nombres impairs.

Mais nous savons que ceci est possible, parce qu'on sait qu'une condition nécessaire et suffisante telle qu'un nombre soit impair est que le reste de ce nombre divisé par 2 est 1. Donc, une définition positive nouvelle du nombre impair peut être énoncé de la façon suivante :

DÉFINITION. — Un nombre impair est un nombre entier dont le reste divisé par 2 est 1.

Alors on peut définir le nombre pair par la définition négative ci-dessous :

DÉFINITION. — Un nombre pair est un nombre entier de la classe complémentaire de l'ensemble des nombres impairs.

Cet exemple nous donne facilement la possibilité de transformer une définition négative en positive.

Un autre exemple en démontre la difficulté.

Exemple II :

DÉFINITION. — Un nombre premier est un nombre entier qui n'est divisible que par lui-même et par l'unité.

Cette définition négative est équivalente aux deux définitions suivantes :

a) *Définition négative propre.*

Un nombre entier qui n'est pas non-premier, est premier.

b) *Définition positive auxiliaire.*

Un nombre non-premier est un nombre entier qui est divisible par un autre nombre entier autre que 1.

Nous pouvons trouver cette définition négative du nombre premier dans n'importe quel livre de l'arithmétique élémentaire. Il y a longtemps qu'on se sert de cette définition, car une condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre soit premier, a été démontrée la première fois par LAGRANGE et cette condition n'est pas très facile à examiner si un nombre est premier ou non. Cette condition est dite en mathématiques : le théorème de WILSON. LAGRANGE a démontré, à l'aide du théorème célèbre de FERMAT, que les nombres $(x^p - x)$ et $x(x+1)(x+2)...(x+p-1)$ sont toujours divisibles par p , ou p est un premier et x est un entier positif quelconque. EULER qui a, en même temps, démontré ce théorème de WILSON, a obtenu une démonstration purement arithmétique. Je ne veux pas donner ici la démonstration, mais seulement le théorème.

THÉOREME DE WILSON. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre p soit premier est qu'il divise le nombre $(p-1)!+1$.

Ce théorème nous suggère donc la définition suivante :

Définition positive du nombre premier. Un nombre entier p qui divise le nombre $(p-1)!+1$, est dit un nombre premier.

Donc, on peut dire en même temps qu'un nombre k qui ne divise pas le nombre $(k-1)!+1$, est dit un nombre non-premier.

Cette définition positive nouvelle est évidemment équivalente à la définition négative ; car d'après le théorème de WILSON, un nombre premier p au sens négatif divise nécessairement le nombre $(p-1)!+1$, et inversement un nombre p qui divise le nombre $(p-1)!+1$ est suffisamment premier.

La définition nouvelle n'est pas, en général, très pratique ; on peut se rendre compte de ceci au premier coup d'œil, parce que le nombre $(p-1)!+1$ est très grand si p est un nombre assez grand. Cependant, l'établissement de ce théorème nous démontre la possibilité de la transformation d'une définition négative en une définition positive, même si elle est difficile.

Un troisième exemple que je vais citer ici est un cas auquel je ne puis pas dire, à ma connaissance, s'il est possible ou non de transformer en une définition positive. C'est la définition d'un ensemble de seconde catégorie de Baire.

Exemple III :

Définition négative propre. — Les ensembles des points qui ne sont pas de première catégorie sont dits de seconde catégorie (I. 2).

Définition auxiliaire. — Nous disons qu'un ensemble de points est de première catégorie dans un intervalle PQ , s'il est constitué par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est non dense dans l'intervalle PQ .

Ici, on dit qu'un ensemble est dénombrable s'il y a une correspondance entre les éléments de cet ensemble et tous les nombres entiers 1, 2, 3, ... n , ... Nous disons encore qu'un ensemble de points, E est non dense dans un segment PQ si

toute portion du segment PQ contient une portion dans laquelle ne se trouve aucun point de E.

Pour cette définition d'un ensemble de seconde catégorie de BAIRE, nous avons seulement une condition nécessaire ou une condition suffisante, mais nous ne connaissons pas, malheureusement, une condition nécessaire et suffisante. Par exemple, un tel ensemble sera nécessairement dense dans au moins un intervalle partiel de PQ (II. 2), et il suffit qu'un ensemble soit de seconde catégorie, s'il est un complémentaire d'un ensemble de première catégorie. Cette dernière condition est seulement suffisante, car il y a les ensembles de seconde catégorie qui sont les complémentaires de seconde catégorie (VI. 4).

En mathématiques, les questions de ce même type sont trop nombreuses. Si nous ne démontrons pas qu'il est impossible de trouver une telle conditions nécessaire et suffisante, nous pouvons assurer toujours que cela est possible. Et par conséquent, il est toujours possible de changer une définition négative en positive, c'est-à-dire que la relation :

$$B=c(A)$$

entraîne toujours la relation :

$$A=c(B).$$

8. -- Définition descriptive et définition constructive

Dans une conversation ordinaire ou bien dans les phrases d'usage, on définit un terme ou un objet souvent par une méthode descriptive. Par ceci, on énonce des propriétés caractéristiques de l'objet que l'on veut définir. Nous disons que cette sorte de définition est une définition descriptive.

En général, dans ces définitions, nous énonçons les propriétés par certaines conditions auxquelles l'objet défini doit satisfaire. Donc, cette sorte de définition est dite aussi axiomatique parce qu'elle énumère les axiomes nécessaires.

Pour qu'une telle définition soit légitime, il faut l'assujettir à certaines conditions. Il faut tout d'abord que les conditions énoncées soient compatibles ; ou bien qu'il n'y ait pas de contradiction entre elles, c'est-à-dire qu'aucune de

leurs conséquences ne soit pas de la forme « A est non-A ». Ensuite, que les conditions énoncées soient indépendantes entre elles. Car une condition dépendante peut être supprimée sans altérer la définition.

L'emploi d'une définition descriptive est indispensable pour le premier terme d'une science quand on veut construire cette science d'une façon purement logique et abstraite. C'est pourquoi M. DRACH l'a appelée une définition logique (VIII). A cause de son abstraction, une définition descriptive comme une définition négative, n'est pas généralement très bonne et très pratique, particulièrement en mathématiques.

Les définitions qui sont le plus souvent employées en mathématiques sont les définitions dites constructives, lesquelles indiquent comment s'engendre l'objet qu'il s'agit d'étudier. Ainsi dans les définitions constructives, on énonce quelles opérations il faut faire pour obtenir l'être — en général une classe — que l'on veut définir.

La relation entre ces deux sortes de définitions descriptives et constructives est semblable à celle qui existe entre les définitions négatives et les définitions positives. Nous ne satisfaisons pas à la règle si nous n'avons qu'une définition descriptive ; parce que l'existence de ce que nous allons définir n'est pas certaine si nous ne savons pas comment le construire. Donc, beaucoup de travaux mathématiques ont pour objet de rechercher les définitions constructives équivalentes aux définitions descriptives données. M. H. LEBESQUE a dit dans son ouvrage remarquable : *Leçon sur l'Intégration* : « On peut dire que les travaux exposés dans cet ouvrage ont pour but principal la recherche d'une définition constructive équivalente à la définition descriptive des fonctions primitives ».

Pour compléter un tel travail de recherche d'une définition constructive équivalente à une définition descriptive, il faut démontrer, comme nous l'avons dit pour la définition négative, que la classe définie par la définition nouvelle est comprise dans la classe définie par la définition primitive et inversement. Après l'établissement de cette démonstration, les deux définitions seront exactement équivalentes.

Un exemple plus simple est celui-ci :

DÉFINITION. — La racine d'une équation de second degré,
 $P=ax^2+bx+c=0$
 est le nombre x_0 satisfaisant à la condition

$$ax_0^2+bx_0+c=0.$$

Cette définition est une définition descriptive dont la condition donnée est le seul axiome :

$$ax_0^2+bx_0+c=0.$$

Par cette définition, nous ne savons pas si les racines forment une classe nulle ou non, c'est-à-dire que nous ne savons pas si la définition est non-absurde. Donc une définition constructive est nécessaire. Nous la changeons par la suivante.

DÉFINITION. — Nous disons que les nombres :

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

sont les racines d'une équation de second degré de la forme $P=0$.

Il est évident que les deux définitions sont équivalentes.

Un autre exemple que je veux prendre ici est la définition de l'intégral de M. LEBESQUE.

Un intégral de $f(x)$, $\int_a^b f(x)dx$ dans un intervalle (a, b) donné par M. LEBESQUE est celui qui satisfait aux conditions suivantes :

1. Quels que soient (a, b) on a :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{b-h}^{b+h} f(x-h)dx$$

2. Quels que soient a, b et c , on a :

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_a^b [f(x) + \alpha(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \alpha(x)dx.$$

4. Si l'on a $f \geq 0$, et $b > a$, on a aussi :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

5. On a :

$$\int_0^1 1 \cdot dx = 1.$$

6. Si, quand l'indice n croît, $f_n(x)$ tend vers celle de $f(x)$.

Cette définition est une définition descriptive, et elle est très abstraite. Donc une définition constructive est nécessaire. La définition constructive trouvée par M. LEBESQUE est la suivante :

Soit $f(x)$ une fonction bornée et mesurable, dans un ensemble E borné et mesurable. Désignons A et B les bornes de $f(x)$ et partageons l'intervalle (AB) de ces deux bornes par une échelle de nombres croissants :

$$A=1_1, 1_2, \dots 1_n, 1_{n+1}+B.$$

Désignons par e_i la mesure de l'ensemble des points de E (E peut se réduire à un intervalle a b) où l'on a :

$$1_i \leq f \leq 1_{i+1}$$

et aussi, au besoin, cet ensemble lui-même. Formons les deux sommes

$$s = \sum 1_i e_i = 1_1 e_1 + 1_2 e_2 + \dots + 1_n e_n.$$

$$S = \sum 1_{i+1} e_i = 1_2 e_1 + 1_3 e_2 + \dots + 1_{n+1} e_n.$$

Nous avons toujours

$$s \leq S.$$

L'intégrale de $f(x)$ dans E , est alors la limite commune de ces deux sommes quand les nombres consécutifs $1_i, 1_{i+1}$ se rapprochent indéfiniment les uns des autres (si l'en-

semble E se réduit à l'intervalle a b , on a $\int_a^b f(x)dx$ pour représenter cette somme).

D'après ces exemples il est évident que la définition constructive est plus claire que la définition descriptive.

9. -- Description et définition

KEYNES a proposé de donner des sens différents aux mots « connotation » et « compréhension » que nous avons employés souvent à peu près indistinctement.

La compréhension d'un terme serait l'ensemble de toutes les qualités connues et inconnues qui peuvent être attribuées à un terme. On appellerait connotation, non pas tout ce qui peut être attribué, mais seulement les qualités suffisantes à le définir. Donc la connotation dépend du domaine de la

classe définie, elle a les qualités caractéristiques pour la classe ; elle est une partie de la compréhension. Par exemple, équiangle appartient à la compréhension du concept de triangle équilatéral, mais non à sa connotation, parce que le triangle équilatéral se définit par l'égalité des côtés dont l'égalité des angles est une conséquence.

Il est donc évident que les qualités nécessaires et suffisantes pour qu'un élément appartienne à une classe, appartiennent à la connotation, tandis que toutes les qualités communes aux éléments de cette classe sont les compréhensions. La qualité équiangle est nécessaire, mais n'est pas suffisante pour qu'un triangle soit équilatéral, donc elle est une des compréhensions. D'autre part, « l'égalité des côtés » est une qualité nécessaire et suffisante tel qu'un triangle soit équilatéral, elle est alors contenue dans la connotation.

La connotation d'un terme ou d'une classes dépend toujours de son domaine. C'est un fait bien clair. Reprenons, par exemple, le tableau I. Si j'ai défini que « l'homme est l'animal raisonnable », la qualité « raisonnable » est parmi la connotation de « homme ». Si j'ai défini « l'homme est la substance matérielle, organique et raisonnable », la connotation comprend alors les qualités : matérielle, organique et raisonnable.

Comme la connotation est la qualité caractéristique du défini, la définition est alors une analyse de la connotation du défini.

Deux catégories de la définition doivent être considérées. Il y a des définitions qui sont établies avant la classe définie ou le terme défini. Il y a aussi des définitions qui sont établies après les éléments du défini. La plupart des définitions de mathématiques sont de la première catégorie. Les choses ordinaires sont définies d'après la deuxième catégorie.

Par exemple nous définirons la classe des hommes. Ce sont des hommes qui sont avant leur définition. La définition sera donc obtenue par une analyse des natures caractéristiques des hommes. Par conséquent, elle est en général descriptive, ce qui donne ce que nous avons analysé. La finition du cercle est aussi de cette catégorie. Ce n'est pas parce que l'on trouve le lieu du point équidistant à un point fixe que l'on obtiendra un cercle ; mais c'est parce qu'on cherche la nature

d'un cercle qu'on obtient qu'il est le lieu de tous les points équidistants à un point fixe.

Mais, d'autre part, beaucoup de mots spéciaux dans le langage mathématique sont de première catégorie, par exemple, le nombre premier, l'ensemble dénombrable, etc.

La définition de première catégorie est en général plus précise par sa nature. Mais la définition de la deuxième catégorie n'est souvent pas très rigoureuse ; parce qu'elle peut se confondre avec ce que nous appellerons la description.

La distinction entre la description et la définition descriptive n'est pas bien nette. La description se fait avec un nombre quelconque de termes, mais il peut en être de même de la définition. Il est préférable de distinguer la description de la définition par la différence de la compréhension et la connotation comme nous venons de le dire. Ce que la description donne pour les qualités de défini appartient à la compréhension ; au contraire, la définition nous indique la connotation. La description n'est donc pas caractéristique ; et elle donne seulement, en général, les qualités nécessaires. C'est la définition qui est caractéristique, et qui nous indique les qualités nécessaires et suffisantes pour qu'un objet appartienne à la classe définie.

Toute proposition qui énonce la condition nécessaire et suffisante pour qu'un objet appartienne à une classe, est une définition de la classe à laquelle cet objet appartient.

Au contraire, toute proposition qui énonce quelques qualités, une partie de la compréhension d'un concept (ou une classe) est une description.

10. -- Remarque

Dans la théorie des groupes de GALOIS, il arrive souvent d'introduire l'idée d'adjonction à un domaine donné. Pour expliquer l'idée d'adjonction, nous allons définir d'abord ce que nous appelons le domaine de rationalité.

Un ensemble de nombres est dit : former un domaine, si la somme, la différence, le produit et enfin le quotient de deux nombres quelconques égaux ou inégaux de cet ensemble appartiennent de même à cet ensemble. Les exemples sui-

vants d'ensembles de nombres, chacun forme un domaine : tous les nombres complexes, tous les nombres réels et tous les nombres rationnels ; mais, au contraire, l'ensemble des nombres entiers ne forme pas un domaine, car le nombre a/b peut être une fraction si « a » n'est pas un multiple de b . Nous employons un domaine $D(d_1, d_2, \dots, d_m)$ composé de toutes les fonctions rationnelles avec les coefficients rationnels de $d_1, d_2, \dots, d_m$. Par exemple, $D(5^{1/2})$ est composé de tous les nombres de la forme

$$\frac{a + b5^{1/2}}{c + d5^{1/2}}$$

où a, b, c, d , sont nombres rationnels et c et d ne sont pas tous nuls à la fois.

Cela supposé, nous généralisons l'idée de rationalité de la façon suivante : nous disons qu'un nombre est rationnel s'il peut être réduit par les opérations rationnelles : addition, soustraction, multiplication et division par rapport au domaine donné $D(d_1, d_2, \dots, d_m)$. Ainsi tous les nombres qui peuvent être réduits à la forme ci-dessus sont dits rationnels par rapport au domaine $D(5^{1/2})$, et ce domaine est dit le domaine de rationalité.

Un nombre qui n'est pas rationnel par rapport au domaine $D(d_1, d_2, \dots, d_m)$ peut être rationnel par rapport à un autre domaine $D'(d_1, d_2, \dots, d_m, \dots, d_n)$ par l'adjonction des nombres $d_{1+1}, d_{1+2}, \dots, d_n$ au domaine D . Ainsi, le nombre $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})$ n'est pas rationnel par rapport au domaine $D(\sqrt{5})$, mais il est rationnel par rapport au domaine $D(\sqrt{5}, \sqrt{3})$. Donc D' est le domaine de rationalité du nombre $(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})$.

Il en est de même pour les propositions. Nous avons vu que pour chaque proposition, il y a un domaine associé, le domaine unique de cette proposition. L'absurdité relative de cette proposition dépend de ce domaine et du domaine proposé. De la même façon que celle définie ci-dessus pour la rationalité, nous pouvons dire que le domaine proposé pour une proposition est le domaine de non-absurdité de cette proposition.

Si le domaine de proposition que nous trouvons comme

domaine commun aux classes de cette proposition, est dans le domaine de non-absurdité, la proposition est non-absurde. Une proposition qui est absurde dans un domaine D peut être, comme domaine de rationalité du nombre, rationalisée par l'adjonction de quelques éléments nouveaux, tels que le domaine de non-absurdité peut être étendu de façon qu'il comprend le domaine trouvé.

Par exemple « Socrate est un angle droit » est absurde par rapport au domaine D(Hommes), mais elle est non-absurde par une adjonction d'un élément « angle » au D. Donc le domaine de non-absurdité de cette proposition est D'(hommes, angles).

Naturellement tout ce que nous venons de dire a trait à l'absurdité relative.

CHAPITRE III

SUR LA DEMONSTRATION

Ce fut un des grands mérites de MM. RUSSELL et WHITEHEAD dans leur ouvrage les trois grands volumes des « Principia Mathematica » de nous avoir démontré que toutes les propositions mathématiques pouvaient se traduire par un ensemble des signes logiques et par quelques principes primitifs qui seraient écrits par la combinaison de ces signes. Ceci nous montre que la démonstration d'une proposition mathématique n'est pas autre chose qu'un ensemble des signes déjà définis par avance. Si c'était tout à fait vrai, la logique se confondrait avec la mathématique, et elle est, comme M. RUSSELL l'a déclaré, « la jeunesse de la mathématique » et la mathématique est « la virilité de la logique » (XX. 2). Et, enfin, elles sont identiques. Cette idée est juste, mais il est nécessaire de la modifier un peu, c'est-à-dire que, pour nous, nous ne sommes pas tout à fait d'accord avec cette opinion comme nous allons le voir dans ce chapitre et les chapitres suivants.

Nous allons examiner d'abord la démonstration mathématique, les propriétés de la démonstration et les principes fondamentaux utilisés pour démontrer ; principalement nous nous occuperons de la doctrine de la logistique, de celle de la théorie de M. RUSSELL et de COUTURAT.

1. -- Notions préliminaires

Au début du vingtième siècle, PÉANO, COUTURAT et M. RUSSELL créèrent un mouvement sur les mathématiques pures et la philosophie mathématique, en vue d'isoler les éléments logiques du raisonnement mathématique. D'après leurs

études, ils ont établi une nouvelle théorie de la logique. Ils ont considéré que les mathématiques sont entièrement réductibles à cette logique nouvelle et ils ont fondé ce qu'ils ont appelé la pasigraphie — c'est-à-dire la méthode d'écrire un traité de mathématique sans employer un seul mot de la langue usuelle. Cette logique nouvelle se rattache à des idées de LEIBNITZ et à des théories de DE MORGAN et de BOOLE. Elle est une logique plus formelle et plus précise. L'œuvre principale de cette théorie peut être indiquée par ce qui a été élaboré par MM. WHITEHEAD et RUSSELL, les trois volumes des « Principa Mathematica ». Cette théorie de la logique nouvelle — la logistique — emploie des formules symboliques tout à fait analogues à celles qu'on rencontre en mathématique, particulièrement dans la théorie des ensembles.

Ce n'est pas seulement par sa forme mathématique — comme l'a appelé M. RUSSEL « The mathematical logic » (XX, 3) — que cette nouvelle logistique se distingue de la logique ancienne, mais encore le principe fondamental, le syllogisme classique, se transforme aussi en ce qu'il a appelé le syllogisme hypothétique ; et de plus, il a engendré une nouvelle branche, la logique des propositions et la logique des relations.

La partie fondamentale de cette théorie est le calcul des propositions.

Nous nous servons des deux signes dits : les deux signes fondamentaux : la *négation* ($\neg$) et la *conjonction* ($\cdot$). Ils ont le sens suivant :

Soient p et q deux propositions non-absurdes. Le premier signe « $\neg p$ » s'énonce « non- p » la *négation* de la proposition p . C'est telle fonction de p qui est vraie quand p est fausse, et qui est fausse quand p est vraie. C'est-à-dire : les deux propositions p et $\neg p$ sont contradictoires. Le second signe « $p \cdot q$ » s'énonce *p et q à la fois*, la *conjonction* de deux propositions p et q . Il exprime que p et q sont vraies à la fois.

Ce sont deux signes ayant exactement la même nature et analogues à ceux que nous avons introduits au chapitre I, le complémentaire $c(A)$ et le produit de deux ensembles $(A \cdot B)$. Ainsi nous dirons aussi que « $p \cdot q$ » est le produit logique des propositions p et q .

Le sens du produit peut donc être généralisé dans le cas de plusieurs propositions $P_1, p_2, \dots, p_n$.

Le signe « $\neg p$ » employé ici peut exprimer des concepts différents selon le sens de p :

i. Si p est un nombre quelconque, « $\neg p$ » signifie $\neg p$ « négatif p » c'est-à-dire le nombre symétrique de p .

ii. Si p est un ensemble ou bien une classe, le signe « $\neg p$ » signifie l'ensemble complémentaire de p par rapport à son domaine ⁽¹⁾.

iii. Si p est une proposition générale « $\neg p$ » est « non- p ».

D'une manière semblable, le signe « $p \cdot q$ » peut exprimer les concepts suivants selon le sens de p et q :

i. Si p et q sont deux nombres quelconques, $(p \cdot q)$ signifie le produit de ces nombres.

ii. Si p et q sont deux ensembles $(p \cdot q)$ est un ensemble des éléments communs aux ensembles p et q c'est-à-dire les éléments appartenant à la fois à p et q .

iii. Si p et q sont deux propositions non-absurdes, $(p \cdot q)$ signifie « p et q sont vraies à la fois ».

A partir de ces deux signes fondamentaux nous pouvons définir les trois autres signes suivants :

Disjonction (+). — Le troisième signe fondamental.

Pour un ensemble nous avons déterminé que l'ensemble formé de tous les éléments appartenant au moins à l'un des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$, est appelé la somme de ces ensembles et elle a été désignée par :

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n.$$

Pour une suite de propositions non-absurdes $p_1, p_2, \dots, p_n$, nous appellerons *la somme logique* ou *disjonction* de ces propositions qui s'énonce : *au moins une de cette suite des propositions est vraie*. Elle est désignée par :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n.$$

Les propositions peuvent être toutes vraies, mais seul le cas où elles seraient toutes fausses est exclu.

(1) Il me semble que cette déclaration de M. Padoa, « la négation d'une classe n'est pas l'ensemble des individus qui n'appartiennent pas à cette classe, mais l'ensemble des individus au tout qui n'appartiennent pas à la classe donnée. » (XVI, 3), n'est pas si claire si nous n'employons pas le complémentaire

Nous pouvons définir aussi ce signe symboliquement à l'aide des deux signes *négation* et *conjonction* (donc, ces deux signes sont aussi appelés les deux signes *primitifs*). Nous choisissons maintenant $n = 2$. La disjonction de deux propositions p et q sera définie par la formule suivante :

$$Df_1 : \quad p + q \equiv \neg(\neg p \neg q)$$

nous écrivons ici « Df » au lieu de *c'est une définition*. Cette définition peut donc être traduite en langue usuelle sous la forme : « $p + q$ signifie que non— p et non— q sont vraies simultanément est faux ». Les points à côtés d'égalité signifient les parenthèses $(p + q)$ et $[\neg(\neg p \neg q)]$.

Implication (c). — Le quatrième signe fondamental.

Nous désignons par « $q \ c \ p$ » dit « p implique q », c'est-à-dire « p est une proposition vraie, q en est une aussi » ; ou bien : « ou bien p est faux ou si ce n'est pas le cas, q est vrai ». Cette implication ne nous donne aucune connaissance sur le cas quand p est faux ; donc si p est faux, q peut être faux ou vrai ; mais le seul cas « p est vrai, mais q est faux » est exclu.

Deux analogies se présentent dans la théorie des ensembles : l'appartenance et l'inclusion.

L'appartenance désigne la relation entre les objets et les ensembles. On dit que les éléments d'un ensemble appartiennent à cet ensemble. Si x est un élément d'un ensemble E , nous écrivons d'après PEANO :

$$x \in E,$$

« x appartient à E ».

L'inclusion indique la relation entre deux ensembles. Si tout élément d'un ensemble B est en même temps l'élément d'un autre ensemble A , on dit que B est un sous-ensemble de A et l'on écrit :

$$B \subset A.$$

La relation entre les ensembles A et B est exprimée par le signe (c) appelé « inclusion ».

Cette relation de l'inclusion, comme l'on voit sans peine, est transitive, c'est-à-dire que les formules $A \subset B$ et $B \subset C$ entraînent toujours la formule $A \subset C$. Par analogie, cette propriété transitive se présente aussi pour trois propositions qui sont impliquées entre elles. Soient p , q et r trois propositions, on a toujours :

$$rcp : c : rcq..qcp$$

« l'affirmation simultanée que p implique q et q implique r , implique 'p implique r' ».

Il faut distinguer ici l'appartenance de l'inclusion, car l'inclusion est transitive et l'appartenance ne l'est pas.

Les ensembles peuvent être formés d'objets qui peuvent être eux-mêmes des ensembles et seulement des ensembles. Par exemple la Société des Nations est un ensemble fini des ensembles (nations), si nous admettons que la nation est l'ensemble de citoyens. La France est un élément, un membre de la Société des Nations, mais un Français, un des éléments de la France, n'est pas un élément de la S. D. N. Donc un élément d'un élément de l'ensemble des ensembles n'est pas nécessairement un élément de cet ensemble. Cette propriété caractérise l'intransitivité de l'appartenance, c'est-à-dire : « l'affirmation simultanée que x appartient à F et F appartient à G n'implique pas que x appartient à G ».

Donc, lorsque nous disons :

EcF : Les Parisiens sont Français,

FcG : Les Français sont Européens,

FcG : Les Parisiens sont Européens.

Nous avons considéré des inclusions entre des ensembles, donc la transitivité est justifiée. Mais, lorsque nous disons :

F_eG : La France est un membre de la S. D. N.,

x_eF : Maurice est un Français,

x_eG : Maurice est un membre de la S. D. N.,

l'intransitivité des appartenances se présente clairement.

L'exemple donné par M. A. REYMOND de la forme suivante (XVIII, 2) :

Les nations alliées sont 8.

L'Italie et l'Angleterre sont nations alliées.

L'Italie et l'Angleterre sont 8.

ne me semble pas exactement le cas que « dans les deux prémisses, il y a relation d'appartenance d'éléments tenus pour individuels à leur classe », comme M. REYMOND a indiqué, car la majeure : « les nations alliées sont 8 » a un sens « le nombre des nations alliées sont 8 ». Donc, cette proposition n'est pas de la forme $x_e E$.

L'implication peut aussi être définie à l'aide des deux signes primitifs. On a :

Df₂ : $qcp. = \neg (p \neg q)$

c'est-à-dire que « p implique q » est équivalent à « p vrai et q faux est faux ».

L'incompatibilité. /. — Le cinquième signe fondamental.

Le dernier signe fondamental est le signe d'incompatibilité. Nous désignons par p/q , l'*incompatibilité* des propositions p et q , en indiquant que *p et q ne sont pas vraies à la fois.*

Par cette définition, il est clair que c'est exactement la négation de la conjonction. Symboliquement, on peut définir de la façon suivante :

$$\text{Df}_3 : \quad (p/q) = \neg(p \cdot q)$$

Si nous changeons la proposition $(\neg p)$ de la formule Df_1 par p et inversement, et nous changeons la proposition $(\neg q)$ par q et inversement, nous avons donc :

$$\neg p + \neg q = \neg(p \cdot q).$$

La définition Df_3 deviendra alors :

$$\text{Df}'_3 : \quad p/q = \neg p + \neg q.$$

Cette nouvelle définition Df'_3 est donnée par M. RUSSELL.

Nous avons donc cinq notions fondamentales : négation, conjonction, disjonction, implication et incompatibilité. Il est évident que les cinq fonctions ne sont pas toutes indépendantes, comme nous avons déjà défini les trois derniers signes par les deux autres : négation et conjonction, sans difficulté.

Il a été démontré qu'il est possible de construire ce système de cinq signes moyennant un seul terme primitif ; soit en employant le signe d'implication, c'est la doctrine de M. RUSSELL, soit par le signe d'incompatibilité, c'est la doctrine de M. SCHEFFER (XXI), et soit enfin par un autre signe dit équivalence, c'est la doctrine de M. TARSKI (XXIII, 1).

Le signe d'équivalence est aussi important et fondamental que les autres cinq signes. Nous allons le définir.

L'équivalence $\equiv$.

Pour deux propositions p et q , nous disons qu'elles sont équivalentes et nous le désignons par le signe $p \equiv q$, lorsque p implique q en même temps que q implique p ; c'est-à-dire :

$$\text{Df}_4 : \quad p \equiv q =: p \cdot q \cdot q \cdot p.$$

Analogie avec la théorie des ensembles :

Deux ensembles A et B sont identiques si tout élément de B est l'élément de A et réciproquement. Nous désignons cette relation entre A et B par $A \equiv B$. Il est évident que la condi-

tion nécessaire et suffisante tel que $A \equiv B$, est que AcB et BcA . Symboliquement, on a :

Df : $A \equiv B. = .(AcB) \cdot (BcA)$.

Tout ce que l'on a considéré ici doit déjà nous assurer que les propositions sont toutes non-absurdes. Autrement, les signes définis n'ont pas de sens, car les propositions n'ont pas de valeur logique.

Nous exprimons cette propriété de non-absurdité d'une proposition p par la formule ci-dessous :

(7) pcp .

C'est le principe d'identité « p implique p », c'est-à-dire « il est impossible que p soit fausse et vraie en même temps » car d'après Df_2 on a :

$$pcp. = .-(p \rightarrow p)$$

« que p est vraie et p est fausse, est faux ». Mais quand p est non-absurde et seulement quand p est non-absurde la relation (7) est vraie, donc « pcp » est la condition nécessaire et suffisante pour que p soit non-absurde. D'après ce que nous avons vu au chapitre dernier, on peut le prendre comme la définition de non-absurdité d'une proposition p .

Ce point de vue est un peu différent de l'opinion de M. RUSSELL ; parce qu'il a considéré que *toute proposition s'implique soi*, c'est-à-dire qu'il n'a pas considéré sur l'absurdité de la proposition. Par exemple il a donné au chapitre III de Principia Mathematica, vol. I, les exemples suivants pour démontrer la proposition vraie ou fausse : « The author of Weverly was a poet » (l'auteur de Weverly était un poète) est une proposition vraie, car l'auteur de ce livre est vraiment un poète. Mais « The author of Maid's tragedy was a poet » (l'auteur de Maid's Tragedy était un poète) est fausse, puisque cette pièce a été écrite par BEARNAN et FLETCHER qui ne sont pas poètes. Et enfin « The author of Shomkenkurgin's in Noses was a poet » (l'auteur de Shomkenkurgin's in Noses était un poète) est fausse car un tel livre n'existe pas.

Les deux premiers exemples sont tout à fait corrects car les propositions données sont non-absurdes, elles peuvent être vraies ou fausses. Mais le troisième exemple est une proposition absurde, à notre sens on ne peut pas dire qu'elle soit vraie ou fausse.

2. -- Définition de la démonstration

On doit introduire d'abord une notion importante.

Toute expression logique qui contient au moins un terme variable s'appelle une fonction logique.

La fonction logique est manifestement analogue à la fonction mathématique et la contient comme un cas particulier ; car elle comprend non seulement des termes mais encore des propositions.

Une fonction logique est dite une fonction propositionnelle quand elle devient une proposition à chaque fois qu'on y substitue à toutes les variables les valeurs déterminées. Par exemple, une fonction logique :

x est la capitale de y ,

est une fonction propositionnelle ; car si l'on substitue aux variables x et y les valeurs déterminées, cette fonction logique deviendra une proposition. Donc on peut dire également qu'une fonction propositionnelle est une proposition indéterminée. COUTURAT l'avait appelée une proposition incomplète : « C'est une proposition incomplète qui ne veut rien dire par elle-même. Elle ne devient une proposition vraie ou fausse que lorsqu'on la complète en remplaçant les variables par les termes constants » (V, 4). L'idée de COUTURAT suit pas à pas celle de M. RUSSELL, il n'a considéré comme M. RUSSEL que la proposition non-absurde.

Pour nous, une fonction propositionnelle peut devenir une proposition absurde ou une proposition non-absurde, selon notre choix des constants. Par exemple pour la fonction :

x est la capitale de y ,

si l'on substitue « monsieur Jean » au lieu de x , c'est-à-dire un objet autre qu'une ville, la proposition sera absurde pour n'importe quelle valeur de y , car une telle proposition n'aura pas alors un domaine unique. Et de plus si l'on substitue à x une ville non-existante, la proposition établie sera aussi absurde, quelle que soit la valeur de y .

D'autre part, si l'on substitue à x une ville, mais si l'on substitue à y un objet autre qu'un pays ou bien un pays non-existant, la proposition sera aussi absurde.

Donc les propositions suivantes sont toutes absurdes :

1. $x =$ monsieur Jean, $y =$ France,
« Monsieur Jean est la capitale de la France. »
2. $x =$ Paris, $y =$ une table,
« Paris est la capitale d'une table. »
3. $x =$ A (une ville non-existante), $y =$ France,
« A est la capitale de la France. »

La condition nécessaire et suffisante pour que cette fonction propositionnelle devienne une proposition non-absurde est que :

a. x soit un élément de l'ensemble de toutes les villes du monde.

b. y soit un élément de l'ensemble de tous les pays du monde.

Donc, les propositions suivantes sont toutes non-absurdes, soit vraie, soit fausse :

1. $x =$ Paris $y =$ France
« Paris est la capitale de la France. »
2. $x =$ Lyon $y =$ France
« Lyon est la capitale de la France. »

En général, soit R une relation donnée quelconque de y à x , la fonction propositionnelle xRy peut devenir une proposition non-absurde ou une proposition absurde, selon les valeurs données à x et y . Prenons deux autres exemples :

1. $R =$ est le frère de.

La condition pour que xRy soit non-absurde est que x et y soient deux éléments de l'ensemble de tous les hommes.

2. $R =$ est la racine de.

La condition pour que xRy soit non-absurde est que x soit un nombre, et y une équation.

Supposons x et y deux variables et R une relation donnée. Désignons par :

$$E_1(xy).xRy, \text{ ou } E_1,$$

l'ensemble de toutes les couples possibles de x et y simultanées telle que la fonction propositionnelle xRy deviendra une proposition non-absurde si l'on substitue à x et y les valeurs de cet ensemble. Il est évident que l'ensemble E_1 est la somme de deux ensembles : l'un contient toutes les valeurs possibles pour x , l'autre contient toutes les valeurs possibles pour y . Désignons par :

$$E_1(xy).xRy, \text{ ou } E_1.xRy,$$

l'ensemble de toutes les propositions non-absurdes qui seront obtenues de la fonction propositionnelle xRy par une substitution aux variables x et y une couple des valeurs de l'ensemble E_1 . Alors l'expression :

$$E_1(x_1y_1).xRy, \text{ ou } x_1Ry_1,$$

indique une proposition non-absurde qui est obtenue par la substitution aux variables x et y de xRy les valeurs correspondantes (x_1y_1) de l'ensemble E_1 .

Pour toutes les valeurs de x et y autres que l'ensemble E_1 , c'est-à-dire les valeurs de x et y prises de l'ensemble complémentaire $c(E_1)$ de E_1 , la fonction xRy deviendra une proposition absurde. Donc la proposition :

$$c(E_1).xRy$$

est absurde.

D'après la classification Porphyre, nous pouvons diviser encore l'ensemble E_1 en deux sous-ensembles sans aucun élément qui leur soit commun, de telle sorte que l'un d'eux E_2 contienne toutes les couples des valeurs possibles de x et y qui réduisent xRy en une proposition vraie, et l'autre soit l'ensemble complémentaire de cet ensemble par rapport à E_1 .

Donc pour toute une couple des valeurs de l'ensemble E_2 , la fonction propositionnelle xRy est vraie. Et pour toute une couple des valeurs de l'ensemble $c(E_2)$, xRy est fausse. On peut faire un tableau pour exprimer ces divers cas :

TABLEAU II

Fonction propositionnelle xRy	
$E_1.xRy$ (non-absurde)	$c(E_1).xRy$ (absurde)
$E_2.xRy$ (vraie)	$c(E_2).xRy$ (fausse)

Une fonction propositionnelle n'est donc pas seulement à sens variable, elle est aussi, en général, à valeur logique variable.

Si une fonction propositionnelle, xRy par exemple, a une valeur logique déterminée, elle sera une proposition.

Soit V cette valeur logique, c'est-à-dire pour n'importe quel couple des valeurs de x et y , xRy est vraie. Alors la classification de Porphyre n'existe plus et les deux ensembles complémentaires $c(E_1)$ et $c(E_2)$ sont vides, i. e.

$$(8) \quad c(E_1) = c(E_2) = 0.$$

Si xRy n'est pas une proposition déterminée, on peut toujours choisir un x ou un y tel que le domaine de x ne coïncide pas avec le domaine de Ry , donc $c(E_1) \neq 0$. De même $c(E_2) \neq 0$. Ceci montre une contradiction avec la formule (8).

Ce théorème est tout à fait analogue au théorème fondamental de l'algèbre : si une équation algébrique d'une variable est satisfaite par toute la valeur de la variable, cette équation doit devenir une identité.

Nous allons maintenant examiner la démonstration.

La démonstration joue un grand rôle dans le domaine mathématique. Pour établir chaque proposition mathématique, il faut démontrer qu'elle est une proposition vraie, c'est-à-dire qu'elle est déduite d'une fonction propositionnelle dont les valeurs données aux variables sont prises de l'ensemble E_2 qui est donné implicitement ou explicitement par la proposition. Pour faire ceci, nous avons besoin d'un procédé dit : la démonstration.

Une idée plus précise de la démonstration sera formulée de la façon suivante : l'ensemble des opérations des procédés nécessaires pour démontrer qu'une proposition est vraie, et des propositions vraies intermédiaires que cela conduit à introduire, sera appelé : la démonstration.

Que veulent dire, en effet les mots : l'ensemble des opérations des procédés nécessaires et de propositions vraies intermédiaires ? Prenons un exemple, un très beau raisonnement classique pour démontrer un théorème de la théorie des nombres.

Théorème. — Le nombre des nombres premiers n'est pas fini.

Raisonnement :

1. Si le nombre des nombres premiers est fini, il y a un dernier. Supposons p ce nombre dernier. Formons le nombre :

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots p + 1$$

où $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots p)$ est le produit de tous les nombres premiers.

2. Si ce nombre $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots p + 1)$ est premier, il est plus grand que p , et p n'est donc pas le dernier nombre premier.

3. Si ce nombre n'est pas premier, il est divisible par un nombre premier d'après la définition du nombre premier. Mais comme 2, 3, 5, 7, ..., p , tout nombre premier connu ne divise pas ce nombre, donc il existe un autre premier qui divise ce nombre et qui est plus grand que p . Donc p n'est pas le dernier nombre premier.

4. En tout cas il est faux qu'il y ait un dernier nombre premier. Donc le nombre des nombres premiers est infini.

Examinons ce raisonnement.

1. La première étape du raisonnement est une opération ou un procédé pour former un nombre auxiliaire.

2. La deuxième et la troisième étapes du raisonnement composent ce que nous allons appeler le principe du tiers exclu qui est une proposition vraie intermédiaire (voir paragraphe prochain).

3. La dernière étape du raisonnement est fondée sur le principe de double négation qui est aussi une proposition vraie intermédiaire (voir paragraphe prochain).

On peut donc dire que la démonstration est l'ensemble des actions de déduire une proposition vraie d'un ensemble des propositions données à l'avance.

Il est bien clair d'après cette idée de la démonstration qu'il est impossible que toutes les propositions soient démontrées, car démontrer une proposition, c'est établir sa vérité par rapport à d'autres propositions. Il y a donc des propositions vraies qui sont indémontrables.

Nous appelons propositions primitives les propositions vraies indémontrables intermédiaires pour toute la démonstration. C'est aussi ce que nous pouvons appeler les règles principales du raisonnement.

Pour M. RUSSELL, les propositions suivantes sont admises comme vraies indémontrables et sont appelées comme les cinq propositions primitives désignées par p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , p_5 :

1. Principe de tautologie p_1 :

$$p \text{ c } p + p$$

2. Principe d'addition p_2 :

$$p + q \text{ c } q$$

3. Principe d'association p_3 :

$$p+q+r:c:q+.p+r$$

4 Principe de permutation p_4 :

$$q+p.c.p+q$$

5. P_5

$$p+p.c.p+q:c:rcq$$

Tous ces principes sont évidents d'après des définitions. Les points (:) et (.) servis en ces principes sont utilisés pour distinguer les forces de repos, ils ont la même fonction que les parenthèses () et [].

3. -- Lois et principes fondamentaux pour la démonstration

Supposons que la proposition que nous allons utiliser soit non-absurde.

1. LOI DU MILIEU EXCLU (ou principe du tiers exclu)

(9) V. $p+—p.$

Pour signaler qu'une proposition est vraie, nous la ferons précéder du signe « V. », c'est-à-dire « il est vrai que ». La loi du milieu exclu formulée ci-dessus signifie alors que : « *il est vrai qu'une proposition non-absurde est vraie ou bien fausse* ». Ce principe est évident d'après notre tableau II.

Cette loi du milieu exclu est tout à fait analogue à la formule (3) du chapitre II, au cas que $i=j$. D'après cette formule (3) il résulte facilement que

$$x \in A_{i-1} = .x \in Ai + x \in Bi.$$

« Il est vrai que si x appartient à A_{i-1} , x appartient à Ai ou bien x appartient à Bi ». Donc cette formule correspond à la loi du tiers exclu où le rôle du complémentaire joue la négation.

Quelquefois on considère qu'il y a des propositions qui ne sont ni vraies, ni fausses ; alors on croit que la loi du tiers exclu a des exceptions. Mais ceci est faux car le principe est établi sur la classification de PORPHYRE qui est universelle et sans exception (voir notre chapitre V). Par conséquent la loi du milieu exclu est universelle et sans exception.

2. LOI DE CONTRADICTION

Deux concepts sont dits en logique contraire, lorsqu'ils ne peuvent être simultanément affirmés d'aucun sujet. Soient

deux concepts A et B. Dire qu'ils sont contraires, c'est dire que :

si C est A, C n'est pas B ;

si C est B, C n'est pas A,

quel que soit le sujet C.

Deux concepts sont dits contradictoires en logique, lorsqu'ils ne peuvent être ni affirmés, ni niés simultanément d'un sujet, c'est-à-dire que :

si C n'est pas A, C est B ;

si C n'est pas B, C est A,

quel que soit le sujet C.

Si l'on prend, $A=B$, les quatre jugements ci-dessus sont tautologiques. Ils caractérisent la loi de contradiction qui énonce que « il est faux que une proposition p et non-p sont vraies à la fois ». Car si p et non-p sont vraies en même temps, il existe donc un C (un sujet) qui est p et qui est aussi non-p.

Symboliquement on écrit cette loi sous la forme suivante :

$$(10) \quad V. \quad \quad \quad \neg(p \neg p)$$

Si nous changeons p par un ensemble Ai et $\neg p$ par son complémentaire Bi par rapport à leur domaine, cette expression de la loi de contradiction sera évidemment équivalente à la formule (3) qui peut être énoncée sous la forme :

$$(Ai \cdot Bi) = 0.$$

Le signe $(=0)$ a la même fonction que le signe $(\neg)$, extérieur de la parenthèse.

3. LOI DE DOUBLE NÉGATION

C'est une analogie de la formule (6) donnée au chapitre II, que le complémentaire d'un complémentaire d'un ensemble A est l'ensemble A lui-même. Nous pouvons formuler sous la forme

$$A=c(B), \text{ et } B=c(A)$$

donc,

$$A=c(c(A)).$$

Pour une proposition p, on a alors :

$$(10) \quad V. \quad \quad \quad p=\neg(\neg p).$$

Pour la démonstration on fait souvent le raisonnement

suivant : « Il est faux que le théorème soit faux », alors on établit le théorème. L'exemple pour démontrer l'infinité des nombres premiers dont nous avons parlé est une application de cette loi.

Les différences essentielles entre le calcul des propositions et le calcul d'algèbre ordinaire sont la loi de tautologie, qui est analogue à celle que nous avons introduite au chapitre premier, et le théorème de DE MORGAN que nous allons signaler maintenant.

a) *La loi de tautologie.* — Pour un ensemble E quelconque, nous savons que les éléments communs à E et E, c'est E lui-même. D'après la définition du produit des ensembles, on a alors :

$$E \cdot E = E.$$

De la même façon on a :

$$E + E = E.$$

Pour une proposition non-absurde p, on a par analogie :

$$V : p = p \cdot p,$$

$$V : p = p + p.$$

b) *Théorème de de Morgan.* — D'après la définition de la disjonction que nous avons donnée plus haut, nous avons

$$Df_1 \quad p + q = \neg(\neg p \cdot \neg q)$$

donc :

$$V : \neg p + \neg q = \neg(p \cdot q) \quad (Df_1 - p/p, \neg q/q)$$

La notion $(Df_1 - p/p, \neg q/q)$ exprime le changement de p par $\neg p$ et q par $\neg q$ dans la formule Df_1 .

De plus, par la loi de double négation, on voit sans peine que

$$(12) \quad V : \neg(p + q) = \neg \neg p \cdot \neg \neg q.$$

Les formules ci-dessus sont dites les formules de DE MORGAN.

Soient E_1 et E_2 deux ensembles quelconques, les formules de DE MORGAN analogues à la théorie des ensembles sont :

$$c(E_1 \cdot E_2) = c(E_1) + c(E_2)$$

$$c(E_1 + E_2) = c(E_1) \cdot c(E_2).$$

C'est-à-dire le complémentaire d'un produit des ensembles est la somme des ensembles complémentaires, et le complémentaire d'une somme des ensembles est le produit des ensembles complémentaires. Ces formules peuvent être déduites directement du théorème de DE MORGAN sur les propositions où le rôle de la négation joue le complémentaire.

Il est donc évident que le calcul des propositions est tout à fait analogue à celui des ensembles. L'addition (disjonction) et la multiplication (conjonction) des propositions sont alors aussi, comme celles des ensembles, associatives, commutatives, distributives. Donc :

$$V.: \quad p \cdot q + r := p \cdot q + p \cdot r,$$

$$V.: \quad p + q \cdot r := p + q \cdot p + r$$

dont la loi associative, la loi commutative et la loi distributive sont évidentes pour les ensembles par sa définition.

4. PRINCIPE D'IMPLICATION

Par définition de l'implication qcp , on sait que p implique p donne seulement le cas p vrai, q vrai. Mais ce n'est pas dire que q se déduit forcément de p , et cela n'indique pas non plus le cas que p est faux. Donc si p est faux, q peut être vrai ou bien q peut être faux. Seulement le cas « p vrai et q faux » est exclu. D'après cette explication, il est suffisant qu'une proposition soit vraie si elle est impliquée par une autre proposition vraie ou bien si elle est impliquée par une suite de proposition vraies. Mais cette condition n'est pas nécessaire, car une proposition vraie peut être impliquée par une proposition fausse. Donc on a,

THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA DÉMONSTRATION.

Pour qu'une proposition soit vraie, il suffit qu'elle soit impliquée par une ou bien une suite de propositions vraies.

Cette suite de propositions vraies et les opérations utilisées construisent le système de la démonstration.

4. -- Principe du syllogisme

KANT a divisé le jugement selon la relation en trois catégories (XIII. 1) :

1. Jugement catégorique ;
2. Jugement hypothétique ;
3. Jugement disjonctif.

On appelle jugement catégorique, celui qui affirme ou nie entre deux termes un rapport d'attribut à sujet. Il est souvent écrit sous la forme : S est ou n'est pas B, S étant un sujet, P étant un attribut.

Un jugement hypothétique est celui qui affirme ou nie entre deux termes un rapport de principe à conséquence. Il est souvent présenté sous la forme : P entraîne ou exclut q où p et q étant deux hypothèses.

« Il y a des propositions disjonctives mais il n'y a pas de jugement disjonctif » (XI, 1).

Selon les catégories des jugements, on peut diviser les syllogismes en deux catégories : syllogisme catégorique et syllogisme hypothétique, selon que la majeure du syllogisme est un jugement catégorique ou un jugement hypothétique.

a) SYLLOGISME CATÉGORIQUE

Le syllogisme est la démonstration la plus fondamentale et la plus simple ; la plupart des démonstrations géométriques synthétiques sont sous la forme du syllogisme.

Le principe du syllogisme est fondé sur la transitivité de l'inclusion des ensembles ou la transitivité de l'implication des propositions. On peut la formuler sous les différentes formes suivantes :

1. *Le syllogisme catégorique de la première catégorie.*

Ce syllogisme est composé de deux appartenances et d'une inclusion. Dans les deux prémisses, la majeure exprime une inclusion et la mineure exprime une appartenance et la conclusion est une inclusion. Il peut être formulé sous la forme suivante :

$$(13) \quad V. \therefore \quad x \in G : c : (x \in F) \cdot (FcG).$$

« Il est vrai que si x est un élément de F, et si tout élément de F est l'élément de G, alors x est un élément de G », par exemple :

FcG : Tout homme est mortel ;

$x \in F$: Socrate est un homme ;

$x \in G$: Socrate est mortel.

L'importance, dans ce syllogisme, est que la majeure doit être l'inclusion de la forme FcG , car nous avons déjà vu que les appartenances ne sont pas transitives.

Si nous changeons dans la formule (13) l'ensemble G par son complémentaire, on a le syllogisme suivant :

$$(14) \quad x \in c(F) : c : (x \in G) \cdot (Fcc(G)).$$

« Il est vrai que si x est un F et nul, F est G , alors x n'est pas G ». Par exemple :

$Fcc(G)$: Tous les députés de Paris ont voté cette résolution.

$x \in G$: Le député A n'a pas voté cette résolution.

$x \in c(F)$: Le député A n'est pas député de Paris.

Considérons le tableau I du chapitre II. D'après la formule (3), il est évident qu'il n'y a aucun élément commun aux ensembles Ai et Bi . Donc si x est un élément de $c(G)$ et tout élément de F est un élément de G , x n'est pas un élément de F . On a donc le syllogisme :

$$x \in c(F) : c : (x \in c(G)) \cdot (FcG).$$

« Il est vrai que si x n'est pas G et tout F est G , x n'est pas un F ». Par exemple :

Les malfaiteurs ont les cheveux roux.

Cet homme n'a pas les cheveux roux.

Cet homme n'est pas un malfaiteur.

2. Le syllogisme catégorique de deuxième catégorie.

Cette catégorie du syllogisme peut être écrite sous la forme de la transitivité de deux inclusions, la conclusion est aussi une inclusion.

$$(15) \quad EcG : c : EcF..FcG ;$$

ou bien

$$ecG : c : ecF..FcG ;$$

ou e est un sous-ensemble de E . La première forme s'énonce :

« Tous les F sont G , tous les E sont F , donc tous les E sont G ». La deuxième forme s'énonce : « Tous les F sont G , quelques E sont F , donc quelques F sont G ». L'exemple que j'ai donné au premier paragraphe de ce chapitre est un de ces cas.

b) SYLLOGISME HYPOTHÉTIQUE

Un syllogisme hypothétique est formé par une majeure, un jugement hypothétique : « p entraîne q », c'est-à-dire que

dans le cas où p est donné, q est donné. On peut le diviser en deux sortes selon le petit terme, soit une affirmation, soit une hypothèse.

1. *Syllogisme hypothétique de la première catégorie.*

La forme du syllogisme hypothétique de la première catégorie, est la même que la transitivité des implications, sous la condition que pcq a un sens « si p est vrai q est vrai ». Il est

(16) $rcp:c:rcq..qcp,$
c'est-à-dire

si q est vrai, r est vrai,
si p est vrai, q est vrai,
donc si p est vrai, r est vrai.

Les trois propositions de ce syllogisme sont hypothétiques. Par exemple :

rcq : si deux triangles ont les angles égaux, ils sont semblables.

qcp : si deux triangles ont leurs côtés parallèles, ils ont leurs angles égaux.

rcp : donc, si deux triangles ont leurs côtés parallèles, ils sont semblables.

Les trois propositions peuvent être positives ou négatives, la forme de ce syllogisme ne change pas.

2. *Syllogisme hypothétique de seconde catégorie.*

Une autre forme du syllogisme hypothétique avec une conclusion non-hypothétique, dont la mineure est une affirmation, mais la majeure est encore hypothétique :

si, p est vrai, q est vrai,
or, p est vrai,
donc, q est vrai.

Symboliquement, si l'on écrit par « $V.p$ » au lieu de « il est vrai que p est vrai », ce syllogisme sera formulé par

(17) $V. \quad q:c:p..qcp.$

Par exemple,

qcp : s'il est jour, il fait clair.

$V. p.$: or, il est jour,

$V. q$: donc, il fait clair.

Les propositions p et q de la majeure pcq , peuvent être deux fonctions propositionnelles. Dans ce cas la mineure et la conclusion sont deux propositions vraies qui seront obtenues par les substitutions aux variables des fonctions par les constants. Donc on a

si xRy est vrai, $xR'y$ est vrai,
or, x_1Ry_1 est vrai,
donc, $x_1R'y_1$ est vrai.

Ici, x et y sont variables, R et R' sont deux relations données. x_1 et y_1 sont deux constants tels que la proposition : « x_1Ry_1 » est actuellement vraie. Par exemple, posons :

R = est la capitale de,
 R' = est la plus grande ville de,
 x_1 = Paris,
 y_1 = France,

on a alors :

Si x est la capitale de y , x est la plus grande ville de y .

Or, Paris est la capitale de la France,

donc Paris est la plus grande ville de la France.

Ordinairement, on n'énonce pas souvent la majeure sous une forme de la fonction propositionnelle explicitement. Au lieu de cette fonction propositionnelle : « si x est la capitale de y , x est la plus grande ville de y », on dit : « *Toute capitale d'un pays est la plus grande ville de ce pays* ». Un autre exemple est aussi donné sous cette forme :

Si deux triangles ont leurs côtés parallèles, ils sont semblables.

Or, les deux triangles ABC et DEF , ont leurs côtés parallèles.

Donc ABC et DEF sont semblables.

Il s'agit ici de deux questions intéressantes :

1° Est-ce que les deux sortes du syllogisme hypothétique sont indépendantes ?

2° Est-ce que les deux sortes du syllogisme catégorique sont indépendantes ?

Par le mot « indépendantes », nous comprenons le cas où nous ne pouvons pas déduire l'un de l'autre et si l'un est un cas particulier de l'autre.

Ces questions sont importantes, car si elles sont dépendantes, notre classification ne sera pas nécessaire.

Prenons le syllogisme (17). C'est en effet une conséquence immédiate de la définition de l'implication. Il n'est pas autre chose qu'un principe transformé de la définition d'implication. L'exemple : « *s'il est jour, il fait clair, or, il est jour, donc il fait clair* », montre que la mineure est une proposition dont la fonction est d'affirmer l'hypothèse de la majeure, tel qu'on l'a transformée de jugement hypothétique en jugement catégorique. Mais le syllogisme (16) c'est tout à fait différent. Il représente la transitivité des implications. Il indique une propriété caractéristique des implications. Il n'est pas, par conséquent, comme le syllogisme (17), l'implication elle-même.

Quant au syllogisme (13) et syllogisme (15), il est très facile de les confondre tel que l'on considère le syllogisme (13) comme un cas particulier du syllogisme (15) au cas où l'ensemble E devient un individu x . Cette idée a été indiquée comme étant fausse par PEANO, c'est-à-dire que l'appartenance $x \in F$ n'est pas en effet un cas particulier de l'inclusion $E \subset F$, quand E a un seul élément x . Autrement dit, un individu x est toujours différent d'un ensemble (x) même s'il ne contient qu'un seul élément, le même que l'individu.

A ce point de vue M. SIĘPINSKI a déclaré : « D'après notre notation, (a) désigne l'ensemble formé d'un seul élément qui est l'objet a . On dira peut-être qu'il n'y a pas d'ensemble où il n'y a qu'un seul objet. Ce n'est ici qu'une question de terminologie... La seconde question qui se pose c'est la question si l'on doit regarder un ensemble formé d'un seul élément identique avec cet élément ou non ? En d'autres termes, l'identité (a)= a subsiste-t-elle toujours ? Il paraît que ce serait en accord avec l'intuition, cependant (a)= a , implique une contradiction. Il faut donc distinguer entre un ensemble formé d'un seul élément et cet élément lui-même » (XXII. 1).

Par contre, un ensemble d'un élément peut être défini aussi sans utiliser la notion du nombre 1, comme tout ensemble E jouissant de la propriété suivante : Il existe l'objet x tel que $x \in E$ et quel que soit y , $y \in E$ entraîne toujours $y=x$. Tandis qu'un élément x (représente le nombre 1), ne peut pas être défini de cette façon.

Donc on ne peut pas regarder un individu comme un cas particulier d'un ensemble, et alors les deux syllogismes (13) et (15) sont différents et indépendants.

5. -- Dédution et induction

KANT a caractérisé la méthode mathématique en l'opposant à la méthode de la philosophie. Il a considéré que les jugements mathématiques sont tous synthétiques et que les propositions proprement mathématiques sont toujours des jugements *a priori* et non-empiriques ; et de plus, que c'est la mathématique seule qui a des démonstrations proprement dites, car « on ne peut appeler démonstration, qu'une preuve apodictique en tant qu'elle est intuitive. La philosophie ne peut pas effectuer des démonstrations sur ses concepts car il lui manque la certitude intuitive » (XIII, 2).

En quel sens le jugement synthétique agit-il ici ? Pour KANT la différence entre les jugements analytiques et les jugements synthétiques peut se distinguer de la façon suivante : « Dans tous les jugements où est pensé le rapport d'un sujet à un prédicat, ce rapport est possible de deux manières. Ou bien le prédicat B appartient au sujet A comme quelque chose déjà contenu implicitement dans ce concept A, ou bien B, quoique lié à ce concept A, est entièrement en dehors de lui. Dans le premier cas, je nomme le jugement analytique ; je l'appelle synthétique dans le second ». On peut donc dire que les jugements analytiques sont ceux dans lesquels l'union du prédicat avec le sujet est pensée par identité. En d'autres termes, selon KANT, le fondement des jugements analytiques, c'est le principe d'identité. Ceux dans lesquels cette union est pensée sans identité sont des jugements synthétiques (V. 5).

L'idée de KANT a été critiquée par les logisticiens dans une opinion différenciée, car les logisticiens considèrent que la mathématique est entièrement réductible à la logique et que l'intuition n'y joue aucun rôle en mathématique, comme M. RUSSELL a dit : The fact that all mathematics is symbolic logic is one of the greatest discoveries of our age » (le fait que toute la mathématique est la logique symbolique, est une des grandes découvertes de nos jours (XX. 5). Pour nous, cette opinion semble aussi incomplète que celle de KANT. Car nous croyons que la démonstration mathématique, comme nous venons de dire, est composée de deux facteurs :

les opérations, c'est la règle logique, et les principes fondamentaux, c'est les axiomes et les postulats. Les règles logiques sont universelles pour toute la science, mais les principes fondamentaux sont différents pour les différentes branches de la science.

Les logiciens contemporains semblent traiter la méthode scientifique de deux manières opposées par leur caractère — la déduction et l'induction. L'une serait, comme on dit le plus souvent, le passage du général au particulier, c'est la déduction. L'autre serait le passage du particulier au général, c'est l'induction. Notamment les théorèmes des mathématiques sont démontrés par l'une de ces méthodes. La première méthode paraît au théorème comme une conséquence des autres ; la seconde est ce que nous appelons l'induction mathématique. (On dit souvent que la mathématique est une science déductive mais si l'on considère en même temps que l'induction mathématique est aussi un cas de l'induction, on peut dire également que les mathématiques sont inductives. Mais par sa précision extraordinaire, l'induction utilisée en mathématique se transforme en une forme plus rigoureuse, dite alors l'induction complète.)

Le point le plus important dont il s'agit ici est cette question : quel est le cas particulier ? Nous savons qu'une proposition est vraie pour *tout*, est vraie aussi pour *quelque* de tout. Mais le choix d'un cas particulier n'est pas si facile qu'on le considère. Par exemple le syllogisme de la forme

$$V. \quad x_e G : c : x_e F \cdot FcG,$$

peut être facilement considéré comme un cas particulier du syllogisme de la forme

$$V. \quad EcG : c : EcF \cdot FcG.$$

Cependant qu'au contraire nous savons qu'ils sont indépendants, car le cas $x_e F$ n'est pas un cas particulier du cas EcF . Donc, un cas particulier ne peut pas être obtenu par une simple intuition, et il faut en faire avec soin l'examen.

En mathématique, si une proposition est un cas particulier déduite directement d'un théorème, elle est appelée rarement un théorème, mais un corollaire ; parce qu'elle est considérée comme obtenue non pas par une démonstration, mais par une vérification. Elle vérifie clairement le théorème dont elle est suivie. Donc une déduction pure ne doit pas être regardée comme une véritable démonstration. « Aucun théo-

rème ne devrait être nouveau si, dans sa démonstration, n'intervenait pas un axiome nouveau, le raisonnement ne pourrait nous rendre que les vérités immédiates évidentes empruntées à l'intuition directe » (XV. 2). Inversement, si dans une démonstration, il n'intervenait pas de nouveaux éléments, la proposition obtenue est un simple corollaire, et la démonstration n'est pas une démonstration proprement dite. Donc le raisonnement déductif pur ne constitue pas une démonstration ; elle est un raisonnement, une règle logique, comme l'implication, comme la contradiction.

Il arrive souvent, en mathématique, au contraire de la méthode déductive, de pouvoir parvenir d'emblée à une conclusion générale ; on démontre d'abord un cas spécial privilégié, et l'on s'en sert ensuite pour généraliser cette proposition spéciale. Par exemple, on établit la formule de la somme des angles du polygone plan de n côtés pour généraliser la formule de la somme des angles du triangle, et l'on établit presque tout le théorème de fonction de plusieurs variables par la généralisation d'un théorème correspondant au cas de deux variables. Cette façon de procéder est très utile en science mathématique. « Les mathématiciens, déclare M. GOBLOT, procèdent du simple au composé dans l'ordre théorématique, et du composé au simple dans l'ordre problématique » (XI. 2.).

La méthode déductive joue un grand rôle en mathématique. M. RUSSELL a employé les cinq propositions primitives, p_1, p_2, p_3, p_4 et p_5 que nous avons énoncées à la section dernière, comme les cinq principes de la déduction (XX. 6).

Nous allons maintenant exprimer le raisonnement déductif : « ce qui est vrai pour tout, est vrai pour quelques », symboliquement par le signe fondamental : l'implication.

Donnons-nous une fonction propositionnelle, par exemple la fonction que nous avons considérée plus haut, xRy . Elle est, comme on l'a vu, non-absurde et vraie pour toute une couple de valeurs de x et y prises de l'ensemble E_2 . Si cet ensemble n'est pas vide, c'est-à-dire s'il existe au moins une couple (x_1, y_1) telle que la proposition x_1Ry_1 soit vraie, la fonction propositionnelle xRy doit être alors vraie pour tout élément quelconque de l'ensemble E_2 . Ceci exprime que la vérité de l'ensemble des propositions (E_2, xRy) entraîne toujours la vérité d'un de ses éléments $E_2(x_1, y_1).xRy$ ou

x_1Ry_1 . Symboliquement, le principe de la déduction sera formulé sous la forme suivante :

$$(18) \quad V. \quad E_2(x_1y_1).xRy:c:E_2(xy).xRy.$$

Ou bien plus brièvement,

$$V. \quad x_1Ry_1:c:E_2.xRy$$

à la condition que

$$(x_1y_1).c.E_2(xy).$$

Par conséquent, si $f(x)$ est une fonction propositionnelle d'une variable x , $E_2(x)$ est l'ensemble des valeurs de x tel que si l'on substitue à la variable x par un élément de E_2 de la fonction $f(x)$, on obtiendra une proposition vraie. Alors le principe de la déduction sera écrit ainsi :

$$(19) \quad V. \quad f(y):c:E_2(x).f(x),$$

à la condition que :

$$ycE_2(x).$$

Par exemple, une fonction propositionnelle d'une variable : « x est un nombre pair » est non-absurde pour tout l'élément de l'ensemble E_1 (tous les nombres) et elle est vraie pour tout l'élément de l'ensemble E_2 (tous les nombres pairs), un sous-ensemble de E_1 . La fonction propositionnelle : « x est un nombre pair » est vraie pour tout élément de E_2 et par conséquent vraie aussi pour tout élément d'un sous-ensemble de E_2 . Donc x est un nombre pair, il suffit que x appartienne à l'ensemble $E_3(4, 8, 12, \dots 4n)$ qui est un sous-ensemble de E_2 . Par conséquent, on a la formule suivante :

$$(20) \quad E_3(x).f(x):c:E_2(x).f(x),$$

à la condition que :

$$E_3cE_2.$$

Les formules (19) et (20) nous donnent symboliquement le principe de la déduction.

Au contraire, l'induction est une fonction inverse de celle de déduction. Si une fonction propositionnelle $f(x)$ devenait une proposition vraie pour n'importe quel élément d'un ensemble $E_2(x)$ donné à la variable x , elle est alors vraie pour tout l'élément de cet ensemble E_2 . Il nous semble ainsi que l'induction ne diffère pas de la définition suivante : une fonction propositionnelle est dite vraie pour tout l'élément d'un ensemble E_3 , si elle est vraie pour n'importe quel élément de E_2 . L'induction est clairement une action opposée à celle déductive. Elle est le passage du particulier (un élément d'un ensemble) au général (tout élément d'ensemble).

Mais il est quelquefois impossible de savoir par expérience si la fonction propositionnelle est vraie ou fausse pour chacun des éléments de l'ensemble E_2 ; si, par exemple, l'ensemble E_2 contient une infinité d'éléments. Si l'ensemble est fini, l'induction a la possibilité d'être faite complètement, c'est-à-dire que l'on peut alors vérifier si cette fonction propositionnelle est vraie ou non pour chaque élément de l'ensemble E_2 . Prenons, par exemple, la méthode de concordance de STAURT MILL. Si un phénomène P a pour antécédents, tantôt A B C, tantôt A D E, tantôt A F G, l'antécédent A, qui appartient à tous ces antécédents, est la cause de P. Mais si les antécédents varient d'une infinité de manières, l'induction ne peut jamais être complète, c'est-à-dire que même si nous envisageons un nombre aussi grand que possible de faits, la méthode de concordance n'est jamais sûre.

Prenons un autre exemple plus précis. On dit

$$(21) \quad 1+2+3+\dots+n=n(n+1)/2$$

pour tout nombre entier, c'est-à-dire que la fonction

$$f(n)=1+2+3+\dots+n=n(n+1)/2$$

est vraie pour tout élément de l'ensemble $E(1, 2, 3, \dots, n, \dots)$.

Par la méthode inductive, on peut voir que cette formule (21) est vraie pour $n=1$, $n=2$, $n=3$, ... $n=N$. N est un nombre entier aussi grand que l'on veut. Mais si grand que soit le nombre n, on ne peut pas vérifier tous les nombres entiers.

Nous allons établir la proposition importante : à chaque induction, il y a implicitement une déduction.

Considérons la question : comment une proposition peut-elle être établie par un raisonnement inductif ? Si l'on suppose, par exemple, que la proposition : « l'homme est mortel » est établie par l'induction, ce ne doit pas être parce que nous savons que chaque homme est mortel que nous l'avons établie, mais parce que nous connaissons d'abord beaucoup de cas particuliers : Jean est un homme, Jean mort, Paul est un homme, Paul est mort, Socrate est homme, Socrate est mort, etc., et nous faisons alors une hypothèse : *l'homme est mortel*. Et ensuite, nous essayons de la vérifier par les différents cas. Comme nous ne rencontrons jamais une contradiction, nous avons donc le droit de dire que « l'homme est mortel ».

Nous savons des divers faits :

$$\begin{aligned}1+2 &= 3 = 1.3 = 2.3/2 \\1+2+3 &= 6 = 2.3 = 3.4/2 \\1+2+3+4 &= 10 = 4.5/2 \\1+2+3+4+5 &= 15 = 5.6/2\end{aligned}$$

.....

alors nous concluons que pour la somme des premiers n nombres entiers elle peut satisfaire à la formule

$$1+2+3+4+\dots+n=n(n+1)/2.$$

D'abord on n'en est pas certain. Cette proposition est seulement une hypothèse. Ensuite nous essayerons de vérifier cette formule pour n égale n'importe quel nombre entier, et nous examinerons s'il se produit une contradiction. Comme nous ne pourrons jamais arriver à une contradiction, nous constaterons que cette formule est vraie pour tout nombre entier par induction.

Donc, une induction contient toujours implicitement une déduction.

Par sa nature, l'induction n'est pas alors très précise. Elle est incomplète. Pour la compléter, il y a un procédé spécial dit : *l'induction mathématique*, qui est, au contraire de l'induction ordinaire, très précise et complète. On peut dire avec certitude qu'une proposition démontrée par induction mathématique est vraie pour tout ensemble même s'il est infini. On dit aussi cette induction : *induction complète* par son caractère précis.

Selon H. POINCARÉ, le raisonnement de l'induction mathématique est « le raisonnement mathématique par excellence » et pour lui ce raisonnement est un jugement synthétique *a priori*, « le véritable type du jugement synthétique *a priori* ». Donc l'induction mathématique est une démonstration ; elle n'est pas, comme l'induction ordinaire, une simple règle logique.

L'induction mathématique se compose de deux parties :

1. UNE INDUCTION INCOMPLÈTE.

La première partie de l'induction mathématique est l'induction ordinaire. D'après cette induction, on peut avoir une proposition qui est vraie seulement pour un certain en-

semble fini des éléments considérés. Sa vérité ne s'applique pas à l'élément plus que fini — l'infini. La formule (21) ainsi obtenue est sûrement vraie pour un nombre fini d'entiers. Peut-on dire qu'elle est sûrement vraie pour toute une infinité de nombres $E(1, 2, 3, 4, \dots, n \dots)$? La réponse précise sera donnée à la deuxième partie de cette induction.

2. La deuxième partie tend à démontrer qu'en supposant qu'une propriété soit vraie pour un nombre entier quelconque n , elle est vraie aussi pour le suivant de ce nombre $(n+1)$.

Cette partie est, bien entendu, composée d'une infinité de syllogismes hypothétiques de la forme (17). On peut écrire sous la forme suivante :

Si la proposition p est vraie pour le nombre 1, elle est vraie aussi pour le nombre 2.

Or elle est vraie pour 1, donc elle est vraie pour 2.

Or, si elle est vraie pour 2, elle est vraie pour 3.

Or elle est vraie pour 2, donc elle est vraie pour 3.

.....

On voit que la conclusion de chaque syllogisme sera la mineure du suivant. Ainsi *a priori* on sait que q est vrai pour toute une infinité de nombres entiers.

Pour la formule (21), supposons que la formule soit déjà vraie pour n , c'est-à-dire qu'il est vrai que :

$$(21) \quad 1+2+3+\dots+n=n(n+1)/2$$

nous allons déduire l'égalité

$$(22) \quad 1+2+3+\dots+n=n(n+1)=(n+1)(n+2)/2.$$

Augmentons chaque côté de l'égalité (21) par $(n+1)$;

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+n+(n+1) \\ =n(n+1)/2+(n+1), \end{aligned}$$

$$\text{i.e.} \quad \begin{aligned} 1+2+3+\dots+n+(n+1) \\ =n(n+1)/2+2(n+1)/2, \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+n+(n+1) \\ =(n+1)(n+2)/2 \end{aligned}$$

c'est la même que la formule (22).

Donc, si la formule (21) est vraie pour n , elle est vraie aussi pour $(n+1)$, la démonstration est complète.

Ce raisonnement est dit aussi raisonnement par récurrence, parce que si nous désignons x_i et x_{i+1} deux éléments

de l'ensemble E tel que pour tout E une proposition p est vraie, les deux éléments sont liés par la récurrence suivante :

$R :$ $x_{i+1} = xi + 1.$

Donc il suffit de démontrer que si p est vrai pour xi , p est vrai aussi pour x_{i+1} , mais il est vrai pour $x=1$ (par induction ordinaire) par récurrence R , il est vrai pour tout nombre entier.

D'une manière plus généralisée, considérons la définition suivante (due à FREGE) :

Une propriété est dite « R -héréditaire » lorsque, si elle est vraie pour xi , elle est vraie aussi pour x_{i+1} qui a une relation ou une récurrence avec xi .

D'après ceci, on peut définir un ensemble R -héréditaire, s'il peut être défini par une propriété R -héréditaire.

On voit sans peine que tout ensemble R -héréditaire est nécessairement ordonné, car on peut toujours supposer que x_{i+1} est le suivant de xi , c'est-à-dire $xi < x_{i+1}$.

Soit E un ensemble R -héréditaire. Nous dirons qu'il est possible de démontrer qu'une proposition p sera vraie pour tout E par l'induction mathématique, si l'induction ordinaire a déjà démontré que p a été vrai pour quelques E . Par définition, E peut être établi par le moyen suivant :

1° Si xi est un élément de E , x_{i+1} en est un aussi, si seulement

$$xiRx_{i+1}$$

où R est une récurrence connue.

2° Si x_{i+1} est un élément de E , il existe toujours un élément xi de E tel que :

$$xiAx_{i+1}.$$

Dans tout ce que nous voulons démontrer pour que p soit vrai pour tout E , il reste seulement à démontrer la propriété R -héréditaire de p par rapport à E . Car si nous avons démontré cette propriété, c'est-à-dire si nous avons démontré que, si p est vrai pour xi de E , il est vrai aussi pour x_{i+1} de E , alors, d'après le raisonnement par récurrence, p est vrai pour tout $E(x_1, x_2, x_3, \dots xi \dots)$.

Prenons pour exemple,

$R =$ le fils de

et l'on définit que la famille est composée seulement du père, du fils, du petit-fils et de tous les descendants masculins.

Supposons qu'une propriété A a été démontrée comme R-héréditaire. On peut raisonner par l'induction mathématique, s'il y a un ancêtre X ayant cette propriété A, on peut énoncer que cette propriété est vraie pour toute la famille après X.

6. -- Démonstration positive et démonstration négative

La démonstration mathématique dépend aussi de la définition. En mathématiques, démontrer qu'une proposition est vraie, c'est démontrer qu'un ensemble des objets a certaine propriété énoncée par cette proposition. Ou bien, c'est démontrer qu'un ensemble A est un sous-ensemble d'un autre ensemble B ayant pour tout son élément des propriétés énoncées. Démontrer, par exemple, qu'un triangle isocèle a deux angles égaux, revient à démontrer que l'ensemble de tous les triangles isocèles est un sous-ensemble d'un ensemble de tous les triangles ayant deux angles égaux.

Si l'ensemble B est défini par une définition positive, la démonstration pour que A soit un sous-ensemble de B est facile parce que l'on peut vérifier si A a ou n'a pas des propriétés que B possède. Mais si A est défini négativement, cette vérification sera impossible, car la définition de l'ensemble B ne nous donne aucune connaissance sur sa propriété. Alors, notre démonstration sera de démontrer que A n'a pas certain caractère, ou bien qu'il est faux si A a certain caractère ; c'est-à-dire que nous démontrons qu'il est faux que A est un sous-ensemble de l'ensemble complémentaire de B dont les caractères de cet ensemble complémentaire sont bien connus par la définition auxiliaire.

Nous appelons la première sorte de la démonstration, la démonstration positive, et la seconde la démonstration négative.

Puisqu'une définition négative ne nous donne aucune connaissance sur les caractères des objets de la classe définie, pour démontrer qu'un objet appartient à une telle classe, il est nécessaire d'appliquer la démonstration négative. Par conséquent le principe du tiers exclu doit être appliqué ; car s'il y avait une troisième classe au milieu des B et son

complémentaire, la démonstration serait faillible. Pénétrons donc ce sujet en traitant un exemple précis.

Disons qu'un nombre x est algébrique, s'il est possible de déterminer une équation algébrique à coefficients entiers

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = 0$$

dont il soit racine.

Disons que le nombre x est transcendant s'il n'est pas algébrique.

La définition du nombre transcendantal est clairement négative ; la démonstration d'un nombre transcendantal doit aussi être négative, c'est-à-dire que le mathématicien peut démontrer seulement qu'il est faux si ce nombre est algébrique au lieu de démontrer positivement qu'il est transcendantal. Cette démonstration ne peut être vraie que si l'on est sûr qu'il n'y a pas un nombre, ni algébrique, ni transcendantal. C'est le principe du tiers exclu.

La démonstration négative est une méthode inévitable, comme nous avons énoncé qu'il reste beaucoup de définitions négatives qui ne sont pas encore transformées en définitions positives.

Formellement, la démonstration positive est directe, puisqu'elle démontre directement qu'une proposition est vraie. Nous appliquons directement le théorème fondamental d'implication. Au contraire, la démonstration négative n'est pas directe. Elle repose sur les trois principes de raisonnement : le principe du tiers exclu, le principe de double négation et le principe de la contradiction. D'après ces principes, nous pouvons démontrer qu'une proposition non- p sera fausse, au lieu de ce que p sera vrai ; ou bien nous démontrons que si non- p est vrai, il y aurait une contradiction à notre hypothèse.

Ces trois principes qui sont la base de la démonstration négative, sont en effet équivalents entre eux. En d'autres termes, la démonstration négative dépend seulement de l'un de ces trois principes.

1° EQUIVALENCE DU PRINCIPE DE DOUBLE NÉGATION ET DU PRINCIPE DU MILIEU EXCLU

Permettez-moi d'abord, d'expliquer encore une fois la notation :

$$(1, \neg p/p, \neg q/q)$$

Nous utilisons ce symbole, comme nous l'avons dit plus haut, pour signifier l'action du changement du signe ($\neg p$) par p et ($\neg q$) par q dans la formule 1, et inversement. Ainsi que le symbole ($x, a/b$) signifie le changement de a par b et b par a dans la formule x . Alors nous allons démontrer notre équivalence. D'après Df_1 et (11), on a

$$(23) \quad \neg p, \neg q := \neg(p+q)$$

$$(24) \quad p, q := \neg(\neg p + \neg q) \quad (23, \neg p/p, \neg q/q)$$

$$\neg(\neg p)cp \dots pc \neg(\neg p) := \neg \neg [\neg(\neg p)cp] + \neg [pc \neg(\neg p)]$$

$$\frac{\frac{p}{\neg(\neg p)cp} \quad \frac{q}{pc \neg(\neg p)}}{(24)} \quad \neg(\neg p)cp \quad pc \neg(\neg p)$$

supposons

$$(p + \neg p) := \neg \neg [\neg(\neg p)cp] + \neg [pc \neg(\neg p)] \quad (11)$$

Donc

$$\neg(p + \neg p) := p + \neg(\neg p) . + . \neg(\neg p + p)$$

car,

$$\neg p + q = \neg(p \neg q) \quad (Df_1, \neg p/p \neg q/q)$$

$$(25) \quad qcp = \neg p + q \quad (Df_2)$$

$$\neg(\neg p)cp = \neg p + \neg(\neg p) \quad (25, q/\neg(\neg p))$$

$$pc \neg(\neg p) = \neg p + p \quad (25, p/\neg(\neg p), q/p)$$

Posons

$$\neg(p + p) = k$$

et remarquons que

$$V. p + \neg p := V. q + \neg q$$

On a alors $k = k + k$.

Ceci est vrai d'après le principe de tautologie. Donc, le principe de double négation est équivalent au principe du tiers exclu.

2° EQUIVALENCE DU PRINCIPE DU TIERS EXCLU ET DU PRINCIPE DE LA CONTRADICTION

Démonstration :

$$p + \neg q = \neg(\neg p \cdot q) \quad (Df_2, \neg q/)$$

En posant

$$q = p,$$

on a

$$p + \neg p = \neg(\neg p \cdot p)$$

C'est-à-dire que le principe du tiers exclu

$$V. \quad p + \neg p$$

est équivalent au principe de la contradiction,

$$V. \quad \neg(\neg p \cdot p)$$

En résumé, la démonstration ne dépend que de deux principes : la démonstration positive dépend du principe d'implication, le théorème fondamental d'implication, et la démonstration négative dépend du principe de double négation ou bien des deux autres principes de la section 3.

7. -- Démonstration et vérification

« La vérification diffère précisément de la démonstration, déclare POINCARÉ (XV. 4), parce qu'elle est purement analytique, et parce qu'elle est stérile. Elle est stérile parce que la conclusion n'est que la traduction des prémisses dans un autre langage. »

Toute démonstration comprend quelque vérification, mais l'essence de la démonstration n'est pas seulement la vérification. Une démonstration est composée de deux parties : l'une est la vérification, correspondant aux règles logiques, l'autre partie comprend les propositions primitives correspondant à la « certitude intuitive ».

Prenons l'exemple suivant (d'après POINCARÉ) :

Supposons que l'on ait défini le nombre 1, et l'opération $(x+1)$ qui consiste à ajouter l'unité à un nombre donné x . Définissons ensuite :

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2 = 1 + 1 \\ (2) \quad & 3 = 2 + 1 \\ (3) \quad & 4 = 3 + 1 \\ (4) \quad & x + 2 = (x + 1) + 1. \end{aligned}$$

Alors nous avons :

$$\begin{aligned} 2 + 2 &= (2 + 1) + 1 && (\text{par } 4) \\ (2 + 1) + 1 &= 3 + 1 && (\text{par } 2) \end{aligned}$$

d'où
$$2 + 2 = 4.$$

C'est la méthode que LEIBNIZ a utilisée pour démontrer que 2 et 2 font 4. Mais pour nous, il est clair que ce n'est pas une véritable démonstration, c'est une vérification. Pourquoi

ne disons-nous pas qu'elle est une démonstration ? C'est parce qu'elle ne contient que les opérations, les règles.

Reprenons la formule (21), nous l'avons démontré par l'induction complète. Elle comprend une partie, la vérification, vérifier que cette formule est vraie ou non pour $n=1$, et vérifier aussi que si elle est vraie pour n , elle est vraie aussi pour $n+1$. D'autre part elle comprend une partie que nous pouvons appeler : le raisonnement *a priori*, c'est le passage du fini à l'infini. Elle constate que la formule sera vérifiée pour tout nombre entier, si les vérifications ci-dessus sont parfaites.

C'est la deuxième partie qui est la différence essentielle entre la vérification et la démonstration.

CHAPITRE IV

SUR L'EXISTENCE

1. -- Connaissance et existence

Il y a selon DESCARTES deux principes fondamentaux : les uns purement logiques sont les conditions générales de la démonstration et les autres, vraiment métaphysiques, nous donnent les existences réelles. En premier lieu, par exemple, ce sont les axiomes et les règles établis dans le principe logique. En second lieu, « je pense donc je suis » démontre un cas particulier, comme il a déclaré dans son Discours de la Méthode : « Et remarquant que cette vérité : « je pense donc je suis » était si ferme et si assurée que toutes les plus extravagantes suppositions des sceptiques n'étaient pas capables de l'étrangler, je jugeais que je pouvais le recevoir sans scrupule, pour le premier principe de la philosophie que je cherchais ». D'après ceci, il est clair que l'existence est une question assez importante dans la philosophie cartésienne.

Le point de départ de la méthode cartésienne est « le doute ». Pour lui, le doute, un acte de volonté, et un acte de liberté, joue un grand rôle dans le domaine philosophique. On peut douter de toutes les choses mais on ne peut pas douter qu'on doute. Comme douter c'est penser, alors penser est une action certaine, comme douter même. De plus, cette pensée qu'on aperçoit est une pensée bien existante et agissante ; ceci signifie « je pense donc je suis ».

D'autre part, DESCARTES a parfaitement admis que sans les hypothèses (*a priori*) l'esprit humain ne saurait rien découvrir. C'est-à-dire qu'il y aurait toujours un certain lien entre les connus et les inconnus. Autrement dit, on ne peut cher-

cher, en effet, l'inconnu qu'en supposant qu'il y a un certain lien qui le rattache au connu.

LEIBNIZ, pour sa part, a aussi une idée analogue dans sa thèse sur la théorie de la connaissance. Il envisage toujours que la raison (universelle) a deux grandes lois : la première est l'axiome de contradiction : une chose ne peut à la fois être et ne pas être (c'est la raison nécessaire, pour ainsi dire) ; la seconde est l'axiome de raison suffisante : rien n'existe sans une raison qui suffit à l'expliquer. La première loi est alors la loi qui permet d'établir la possibilité de l'existence, et la seconde loi, celle de raison suffisante, correspond à l'actualité de l'existence. Car il ne suffit pas pour qu'une chose existe actuellement, qu'elle n'implique pas contradiction et soit possible en son essence ; il faut encore une raison positive et suffisante par laquelle elle serait passée de l'existence possible à l'existence actuelle.

D'après ce que LEIBNIZ a établi sur la théorie de l'existence, il nous semble qu'il a considéré seulement telle existence qui est positivement connue et qui est actuellement réalisable. Cependant, on voit bien qu'il aurait déjà divisé le caractère essentiel de l'existence d'une chose en deux : la possibilité d'une chose existante, et l'actualité de cette chose existante.

KANT a examiné principalement cette question : « Que pourrions-nous savoir » dans son œuvre capitale : La Critique de la Raison Pure. Il a étudié ce qu'il appelait le *problème général de la raison pure* : comment des jugements synthétiques *a priori* sont-ils possibles ? Pour résoudre ce problème, il insistait ensuite : « La solution du problème énoncé suppose la possibilité d'un usage pur de la raison dans l'établissement et le développement de toutes les sciences qui contiennent une connaissance théorique *a priori* de certains objets c'est-à-dire qu'elle suppose une réponse à ces questions :

Comment une mathématique pure est-elle possible ?

Comment une physique pure est-elle possible ? » (XIII. 3).

Pour KANT, nous pouvons voir deux sortes de connaissances : connaissance empirique et connaissance *a priori*. « C'est donc, pour le moins, une question qui exige un examen plus approfondi et qu'on ne peut expédier du premier coup, que celle de savoir s'il y a une connaissance indé-

pendante de l'expérience et même de toutes les impressions des sens. Cette espèce de connaissance est dite *a priori* et on la distingue de la connaissance empirique, dont les sources sont *a posteriori*, c'est-à-dire dans l'expérience. » Il renforce une fois encore son opinion pour les distinguer plus clairement en disant que : « Sous le nom de connaissances *a priori*, nous entendons donc désormais, non pas celles qui sont indépendantes de telle ou telle expérience, mais celles qui ne dépendent absolument d'aucune expérience. A ces connaissances sont opposées les connaissances empiriques, ou celles qui ne sont possibles qu'*a posteriori*, c'est-à-dire par le moyen de l'expérience. »

Par l'expérience, il peut bien nous enseigner qu'une chose est ceci ou cela, ou bien inversement, ceci ou cela est une chose ; tout ceci d'après la connaissance empirique montre une sorte de l'existence « ceci est une chose ». Par analogie, est-ce que la connaissance *a priori* a une même propriété qui peut démontrer un existence dite existence *a priori* ?

Le plus grand mérite de KANT, comme il a conclu, est d'avoir introduit dans le domaine de philosophie un changement complet de méthode, comme DESCARTE en mathématique, en faisant la géométrie par l'algèbre — la méthode analytique — et analogue à celle de Copernic en astronomie qui considère la Terre autour du Soleil au lieu de la conception ancienne — le Soleil tourne autour de la Terre. Il a considéré la question la plus importante pour la théorie de la connaissance même pour la théorie de l'existence : est-ce la pensée qui se souvient des objets et tourne pour ainsi dire autour d'eux, ou au contraire, ne sont-ce pas les objets qui, pour être connus, sont nécessairement soumis par la pensée à ses propres lois ? Avant KANT, on a supposé que l'intelligence se réglait sur les choses, mais KANT a essayé de considérer l'hypothèse contraire qui consiste à admettre que c'est notre pensée qui règle les objets. Les choses sont pour nous comme nous les pensons ; voilà ce qu'on peut affirmer et ce qu'il appelait la connaissance *a priori*.

2. -- Existence empirique et existence pure

D'après ce que nous avons introduit sur la théorie de l'existence, nous pouvons nous résumer de la façon suivante :

On peut diviser l'existence d'un être en deux sortes exclues :

1° *Existence empirique*. — Cette existence est venue de la connaissance empirique. L'existence est toujours actuellement réalisable. Elle satisfait toujours aux deux lois de LEIBNIZ.

2° *Existence pure*. — Cette existence est formée de la connaissance *a priori*. Elle ne dépend pas de l'expérience. Elle peut avoir seulement une possibilité mais non pas réalisable.

S'il y a une table devant nous, nous pouvons voir qu'elle est de forme ronde ; nous pouvons, par le toucher, nous rendre compte qu'elle est solide. Alors nous disons qu'il y a une table là. Cette connaissance, pour affirmer qu'il existe une certaine chose dite « une table », est sans doute obtenue par nos sens et par notre expérience. L'existence d'une table est alors démontrée par la vue et par le toucher, deux de nos sens. Une telle existence est dite alors existence empirique. Donc l'existence des choses concrètes : les chaises, les hommes, les livres, etc., est démontrée de la même manière ; elle nous est connue par notre expérience, et nous est démontrée par notre connaissance empirique.

Mais, est-ce que toutes les existences sont empiriques ? Non, vraiment non, parce que dans notre connaissance il y a ce que nous appelons la connaissance *a priori*, la connaissance pure. Par exemple la connaissance mathématique est *a priori*, car un être mathématique existant ne peut pas, en général, être identifié par l'expérience. Son existence est dite alors pure.

Une existence empirique dépend toujours de l'expérience. Avant que Christophe COLOMB ait découvert l'Amérique, on ne savait pas qu'il existait une telle partie du monde, c'est-à-dire que la nouvelle terre n'existait pas relativement à ceux qui vivaient avant la découverte de COLOMB. Mais cette inexistence de l'Amérique était vraie en même temps que l'existence de la Terre. Ceci caractérise la relativité de l'existence empirique. Elle est aussi relativement vraie par rapport à nous. Car, lorsque nous disons que c'est une existence empirique, le facteur, le sujet, « nous » est déjà contenu dans le mot « empirique ». L'Amérique existe même avant que COLOMB l'ait découverte, mais l'homme ne dit pas qu'elle existait avant COLOMB, car l'homme, avant COLOMB, n'avait pas encore cette expérience.

L'existence empirique est différente pour l'un et l'autre. Tout ce que l'un obtiendrait par l'expression d'une table, ne peut pas tout à fait coïncider avec celle que l'autre a envisagée. La conception d'une table pour un aveugle est évidemment différente de celle des voyants, car la couleur, la forme, qui permettent aussi d'identifier l'existence de cette table n'existent pas pour cet aveugle. Cette différence résultant du caractère individuel caractérise l'erreur personnelle de l'existence empirique.

Mais l'existence d'un être mathématique n'est pas la même que l'existence ordinaire.

POINCARÉ a dit dans son ouvrage : *La Science et l'Hypothèse* : « Toute conclusion suppose des prémisses, ces prémisses elles-mêmes ou bien sont évidentes par elles-mêmes et n'ont pas besoin de démonstration, ou bien ne peuvent être établies qu'en s'appuyant sur d'autres propositions et comme on ne saurait remonter ainsi à l'infini toute science déductive, et en particulier la géométrie, doit reposer sur un certain nombre d'axiomes indémontrables. » Ce n'est pas seulement sur les axiomes qu'une science doit reposer, mais encore sur les hypothèses et les définitions. Parce que les mathématiques ne sont pas de connaissance empirique, les êtres mathématiques sont alors critiqués selon POINCARÉ, fondé sur les principes indémontrables *a priori*. Par exemple, il faut d'abord que nous ayons le principe sur les nombres complexes et les nombres réels et ses règles de calcul, alors nous pouvons démontrer que le nombre complexe existe. C'est-à-dire que les existences des nombres dépendent seulement de l'établissement des principes de calcul et de définition.

Un autre exemple plus frappant est celui des figures dans les géométries non-euclidiennes.

On doit insister ici sur les points principaux qui différencient la géométrie euclidienne des géométries non-euclidiennes.

Dans la géométrie d'EUCLIDE, on affirme l'axiome connu sous le nom de Postulatum d'EUCLIDE, que :

Par un point on ne peut faire passer qu'une parallèle à une droite donnée.

Il y a longtemps que l'on a cherché, mais en vain, à démontrer cet axiome. Comme on ne peut pas le démontrer,

LABATCHEVSKY a considéré l'axiome contraire ; il a conservé d'ailleurs tous les autres axiomes d'EUCLIDE sauf celui-ci, qu'il a remplacé par l'axiome suivant :

L'on peut par un point mener plusieurs parallèles à une droite donnée.

De cette hypothèse et des autres axiomes conservés il a déduit une suite de théorèmes entre lesquels il est impossible de relever aucune contradiction, et ils sont, bien entendu, très différents de ceux obtenus par EUCLIDE. Ceci construit alors ce que nous appelons maintenant la géométrie de LOBATCHEVSKY. Dons, un triangle dont la somme des angles est 180° , existe toujours dans la géométrie euclidienne mais n'existe pas dans la géométrie de LOBATCHEVSKY, parce qu'un tel triangle est en contradiction avec l'axiome ci-dessus. Et la somme des angles d'un triangle, au sens de LOBATCHEVSKY, est toujours plus petite que 180° .

Par contre, l'axiome de RIEMANN est différent des deux axiomes de LOBATCHEVSKY et d'EUCLIDE, il est constaté de la façon suivante :

L'on ne peut pas mener une parallèle par un point à une droite donnée.

Avec cet axiome et les autres axiomes d'EUCLIDE, RIEMANN a établi ce qu'on a appelé la géométrie de RIEMANN. Le triangle existant au sens de RIEMANN est toujours celui dont la somme des angles est toujours plus grande que deux droites.

Les trois sortes de géométries sont possibles. Il n'est pas question de vrai ou de faux entre elles. « Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être plus commode. » (XV. 5).

Un troisième exemple que je veux citer ici, c'est l'existence des intégrales que j'ai déjà cité une fois au chapitre premier. Une intégrale peut exister au sens de M. LEBESQUE, tandis qu'elle peut ne pas exister au sens de RIEMANN. Et encore, une intégrale peut exister au sens de M. DENJOY, malgré qu'elle n'existe pas au sens de M. LEBESQUE et de RIEMANN.

L'existence des êtres mathématiques est donc bien clairement une existence pure, qui dépend seulement des principes, des hypothèses que nous choisissons telles qu'elle ne doit pas présenter de contradictions à notre prémisse.

L'existence mathématique est donc aussi relative ; elle est

relative par rapport aux principes que nous affirmons, mais ne dépend pas de nous. C'est sa différence essentielle avec l'existence empirique. Quand un être existe purement il doit exister d'une façon unique, car son existence ne dépend que des prémisses fixes qui sont indifférentes par rapport aux différents observateurs. C'est sa seconde différence essentielle avec l'existence empirique.

Tout ce que l'on peut démontrer par l'expérience, c'est qu'un être existe, mais pas qu'un être ne peut pas exister. C'est-à-dire qu'on ne peut pas démontrer par l'expérience qu'un être n'existe pas. Mais l'existence pure constitue l'inexistence, c'est-à-dire que l'on peut quelquefois démontrer purement qu'un être ne peut pas exister, par exemple s'il existe, il doit produire une contradiction avec notre prémisse.

3. -- Existence mathématique

« STUART MILL a prétendu que toute définition contient un axiome, puisqu'en définissant on affirme implicitement l'existence de l'objet défini. C'est aller beaucoup trop loin ; il est rare qu'en mathématiques on donne une définition sans la faire suivre par la démonstration de l'existence de l'objet défini, et quand on s'en dispense, c'est généralement que le lecteur y peut aisément suppléer. Il ne faut pas oublier que le mot *existence* n'a pas le même sens quand il s'agit d'un être mathématique et quand il est question d'un objet matériel. Un être mathématique existe, pourvu que sa définition n'implique pas contradiction, soit en elle-même, soit avec les propositions antérieurement admises » (XV. 6). Cette idée de POINCARÉ nous donne deux choses importantes : l'existence mathématique n'est pas empirique et il suffit qu'un être mathématique existe s'il ne présente aucune contradiction avec lui-même et avec les autres existants bien connus. L'existence mathématique est alors une des plus importantes dans l'existence pure.

Pour bien faire comprendre ce qu'est l'existence mathématique, je vais expliquer d'abord la distinction entre la logique et la mathématique.

Il ne faut pas confondre la logique et la mathématique.

En effet, « mathématique et logique étaient tout à fait distinctes dans la période ancienne. La mathématique était liée avec la science, et la logique avec les Grecs. Mais les deux se sont développées dans le temps moderne : Logique est devenue de plus en plus mathématique, et Mathématique est devenue de plus en plus logique. La conséquence est qu'il est presque impossible de distinguer clairement entre les deux études. En effet les deux sont une » (XX. 7). Malgré ce que M. RUSSELL a dit précédemment, la différence entre la logique et la mathématique est toujours bien distincte. On pourrait définir la logique d'après l'idée de STUART MILL : « La logique est la théorie des opérations intellectuelles qui servent à l'estimation de la preuve... La logique n'entreprend pas de trouver la preuve, mais elle décide si elle a été trouvée. La logique n'observe pas, n'invente pas, ne découvre pas, elle juge. » C'est pourquoi l'on dit que la logique est l'étude des règles des méthodes qui nous permettent d'atteindre la vérité. Tout ce que la logique peut nous donner est seulement le jugement et la critique. Autrement dit, c'est le lien dans la phrase : *on ne peut chercher l'inconnu qu'en supposant qu'il y a certain lien qui le rattache au connu*, que la logique étudie.

Pour les mathématiques, elles sont l'étude pour trouver la vérité des propositions déduites des axiomes, des postulats et des définitions qui sont supposées en avance, par les règles, les méthodes et les procédés permis par logique. La logique est alors une condition nécessaire pour qu'une proposition ou un jugement mathématique soit vrai, mais elle n'est pas la condition suffisante. Une proposition peut être fausse même si elle est logiquement déduite, car elle dépend aussi de la vérité des principes desquels elle est déduite. Comme DESCARTE l'a dit qu'on ne peut pas déduire du connu à l'inconnu sans intermédiaire. L'intermédiaire, c'est la logique (étudié par la logique) ; le connu, c'est les principes : les principes permis par chaque science spéciale.

Un être mathématique étant défini par certaine définition, est alors existant, il suffit qu'il soit logiquement lié avec tous les principes que nous avons adoptés. Par exemple, il ne faut pas être en contradiction avec la postulatum d'EUCLIDE, si nous étudions la géométrie euclidienne.

Il apparaît le cas où nous définissons une chose et qu'elle

existe purement, c'est-à-dire que son existence n'a pas de contradiction avec tous les principes établis, mais nous ne l'utiliserons jamais, cette définition est donc dite inutile, mais ce n'est pas le cas de l'inexistence.

Le premier théorème sur l'existence mathématique est le théorème fondamental d'algèbre sur la racine d'une équation algébrique.

En 1629, Albert GIRARD a énoncé dans son livre : *Invention Nouvelle de l'Algèbre*, le théorème suivant : une équation algébrique a au moins une racine. C'est-à-dire qu'il existe toujours un nombre x_1 satisfaisant une équation algébrique quelconque. Ce théorème ayant été démontré la première fois, par D'ALEMBERT, en 1746, ne nous donne aucune connaissance sur la nature de cette racine et comment on peut la trouver ; mais il nous indique seulement qu'il existe un tel nombre x_1 satisfaisant une équation donnée. En effet, nous savons que si l'ordre de cette équation est plus que cinq, il n'y a pas une méthode algébrique générale pour trouver sa racine, autrement dit, l'on ne peut pas déterminer ce nombre x_1 .

Considérons les êtres mathématiques.

Qu'est-ce qu'affirmer l'existence d'un être mathématique et en particulier l'existence d'un ensemble ? On sait qu'il y a plusieurs opinions différentes, plusieurs mentalités sur ce sujet. Mais on peut les diviser en deux grands groupes : idéaliste et réaliste.

Pour les idéalistes, ils n'essaient même pas de considérer ce que c'est que l'existence. « Exister » c'est « exister », entendent-ils. Ils pensent que l'on ne peut pas expliquer l'existence par une notion plus simple et plus claire. Autrement dit, ils la regardent presque comme une conception indéfinissable. On dit ici « presque » parce qu'ils doutent encore de son indéfinissabilité.

D'après les réalistes, par exemple, dit M. BOREL : « ne considérer aucune classe d'objets tant que nous ne pouvons pas donner une méthode de construction des objets de cette classe ». En même temps M. LEBESQUE a déclaré : « On doit exiger de la démonstration de l'existence d'une catégorie d'êtres mathématiques qu'elle contienne l'énoncé des caractéristiques logiques d'un de ces êtres, mais s'ensuivra seulement. Il est souhaitable que cet énoncé conduise au moins dans les

cas plus simples à un procédé de construction effective de l'être défini et que ce procédé soit d'autant plus régulier et précis que les données sont plus particulières » (XIV, 5). D'après ce point de vue, il faut refuser complètement l'existence de ces classes d'objets dont on sait d'avance que nous ne pourrions jamais connaître aucun de ses individus. Mais ceci est pour toute la classe définie positivement. Pour la classe définie négativement, c'est autre chose. En effet, si nous pouvons démontrer que la classe complémentaire d'une classe définie négativement est aliquote, alors il faut que les éléments de cette classe soient existants. « Quand on veut prouver l'existence de nombres vérifiant une certaine condition, on emploie souvent un raisonnement par l'absurde consistant à démontrer sur l'ensemble des nombres ne vérifiant pas la condition (c'est l'ensemble complémentaire comme nous avons vu) imposée une propriété qui n'appartient pas à l'ensemble de tous les nombres (propriété aliquote de l'ensemble complémentaire) » (M. LEBESQUE, *ibid.*). L'exemple classique de ce mode de raisonnement est la démonstration par CANTOR sur l'existence des nombres irrationnels : les nombres non-rationnels forment un ensemble dénombrable et l'ensemble de tous les nombres n'est pas dénombrable.

Il y a beaucoup de cas en mathématique, particulièrement en théorie des ensembles, où nous définissons un ensemble que nous ne savons pas effectivement construire, et dont nous ne connaissons même aucun de ses éléments. Mais l'existence de cet ensemble est démontrée logiquement parfaite. Ainsi, il faudrait qu'on accepte les deux cas de l'existence. On pourrait distinguer entre le cas dans lequel nous savons en effet construire les éléments de l'ensemble que nous définissons, et le cas où nous pouvons seulement démontrer qu'une existence est légitime, sans prévoir la possibilité de la déterminer effectivement. Dans le premier cas nous dirons que l'existence est effective, dans le second cas, non-effective.

4. -- L'expression symbolique de l'existence

Les choses définies par une définition positive ou bien négative, forment un ensemble. Si cette définition est non-

absurde, c'est-à-dire s'il existe au moins un élément dans cet ensemble défini, l'ensemble défini est aliquote, et inversement.

Par le symbole que nous avons utilisé au chapitre III, nous définissons deux autres symboles de la façon suivante :

I) Ensemble des éléments définis par une définition $f(x)$.

Soit $f(x)$ une fonction propositionnelle ou bien une proposition qui définit un ensemble des éléments, d'où x est un élément arbitraire. Désignons par

(26) $Ef(x)$ ou Ef ,

l'ensemble de tous les x satisfaisant la définition $f(x)$. Donc en effet Ef est l'ensemble défini.

II) Existence de Ef .

L'expression Ef peut n'avoir pas de sens dans le cas où il est vide, c'est-à-dire que la définition $f(x)$ est absurde. Pour exprimer qu'il n'est pas vide, nous adoptons le symbole suivant :

(27) $\Theta(x).f(x)$

Ceci peut être traduit en langage ordinaire de cette façon :

« Il existe un certain x qui satisfait la définition $f(x)$. »

Le symbole « $\Theta(x)$ » signifie *il existe des x* . Si nous remplaçons $f(x)$ de l'expression (27) par $Ef(x)$, la vérité reste invariable. C'est-à-dire que :

$$\Theta(x).Ef(x) ::= \Theta(x).f(x).$$

« L'ensemble $Ef(x)$ n'est pas vide, est équivalent à « il existe un certain x satisfaisant $f(x)$. »

PREMIÈRE PROPOSITION DE L'EXISTENCE.

V. $\Theta(x).f(x).c.f(x_1)$

« Si $f(x_1)$ est vraie, il existe certain x qui satisfait $f(x)$. »

Où x_1 est un constant. Pratiquement cette proposition indique la méthode de prouver un théorème de l'existence positivement. Si l'on a trouvé un élément x_1 qui satisfait $f(x)$, l'existence est établie. Par exemple :

$Ef(x)$ = l'ensemble de tous les hommes

$f(x) = x$ est un animal raisonnable.

Pour démontrer que $Ef(x)$ est non vide, il suffit de trouver un x_1 qui est actuellement un animal raisonnable. Cette condition est suffisante, mais n'est pas nécessaire. Elle est en effet analogue au principe de déduction donné au chapitre III formule (19),

V. $f(y) : c : E_2(x).f(x)$

DEUXIÈME PROPOSITION DE L'EXISTENCE.

Pour démontrer qu'il existe certain élément dans un ensemble défini négativement, on se sert souvent du principe suivant : la deuxième proposition de l'existence.

Soient $A_0(x)$ un ensemble d'éléments quelconques, $A_1(x)$ et $B_1(x)$ deux sous-ensembles complémentaires de l'ensemble A_0 donc,

$$A_1 + B_1 = A_0.$$

Comme les symboles que nous avons utilisés au chapitre III, nous exprimons par $A_0 > A_1$, le fait que A_1 est un sous-ensemble aliquote de A_0 , et $A_0 \geq A_1$, quand A_1 est un sous-ensemble aliquote ou non de A_0 . Alors on a,

V.

$$\Theta(x).B_1(x):c:A_1(x)cA_0(x)$$

« Il est vrai que si A_1 est un sous-ensemble aliquote de l'ensemble A_0 , il existe actuellement certain élément appartenant à son complémentaire B_1 . »

C'est le principe par lequel CANTOR a démontré l'existence des nombres irrationnels. Car il a démontré que les nombres rationnels sont dénombrables tandis que l'ensemble de tous les réels ne sont pas dénombrables.

5. -- Nombres transfinis

L'existence d'un nombre plus grand que l'infini est vraiment une question nouvelle de ces dernières cinquante années.

Pour expliquer ce qu'est un nombre transfini, nous considérerons d'abord quelques notions complémentaires.

Considérons deux ensembles quelconques et faisons abstraction de l'ordre et des qualités de leurs éléments ; si après une telle abstraction, nos ensembles ne diffèrent plus, nous dirons qu'ils sont de même puissance. Dans le cas contraire, nous dirons que leurs puissances sont différentes. C'est donc une extension de la notion de quantité si nous voulons l'appliquer aux ensembles infinis.

Pour mieux comprendre le sens de ce mot « puissance » nous définissons une autre notion « correspondance biunivoque » qui sera souvent utilisée en mathématique.

Soient M et N deux ensembles. Si à chaque élément de M

correspond un élément de N et un seul, et réciproquement à chaque élément de N correspond un seul élément de M, nous disons qu'il existe entre leurs éléments une correspondance univoque et réciproque ou bien tout simplement une correspondance biunivoque.

Deux ensembles M et N qui ont une correspondance biunivoque entre leurs éléments sont dits alors « avoir même puissance ».

On pourrait aussi distinguer, comme les existences, entre le cas dans lequel nous savons en effet établir au moins une correspondance biunivoque entre les éléments de deux ensembles M et N, et le cas où nous pouvons seulement démontrer qu'une telle correspondance existe. Dans le premier cas on dit que les puissances ont effectivement les mêmes, dans le second cas, on dit seulement qu'ils ont même puissance. On voit donc que la notion de puissance se distingue de la notion de nombre ; par exemple, l'axiome arithmétique : le tout est plus grand que les parties n'est pas analogue ici. L'ensemble des nombres pairs est une partie de l'ensemble de tous les entiers, cependant ils ont même puissance ; car on peut mettre la correspondance de ces deux ensembles biunivoquement de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots & 2n & \dots \end{array}$$

Après avoir défini la notion de puissance, nous allons définir quelques mots spéciaux.

Dénombrable. — Si un ensemble a même puissance que l'ensemble de tous les nombres entiers

$$1 \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots n \dots$$

nous pouvons toujours convenir de désigner par un l'élément correspondant à n, et alors cet ensemble prend la forme suivante :

$$u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ \dots \dots$$

tout à fait analogue à celle des nombres entiers. Nous disons qu'un tel ensemble est un ensemble dénombrable.

Non-dénombrable. — L'ensemble qui a des éléments infinis et a une puissance autre que dénombrable est dit non-dénombrable.

Il est démontré qu'un tel ensemble non-dénombrable n'est pas une pure définition, mais qu'il existe effectivement. Par

exemple l'ensemble de tous les nombres réels compris entre 0 et 1 n'est pas dénombrable (II. 3).

Infini et fini. — Soit M un ensemble fini. Cela signifie que nous avons seulement un nombre fini d'objets contenu dans l'ensemble M , par exemple, un ensemble des nombres naturels de 1 jusqu'à 100, ou bien un ensemble de tous les livres du monde. Ce mot « fini » a alors un sens qui peut être exprimé de cette façon, qu'il existe toujours un nombre entier fixe n tel que l'ensemble fini M peut être mis en correspondance biunivoque avec l'ensemble $(1, 2, 3, 4, \dots, n)$. Dans ce cas, si M' est un sous-ensemble aliquote de M , M' ne peut pas être mis en correspondance biunivoque avec M .

Mais pour un ensemble infini, ce n'est pas vrai. Pour définir la notion d'infini, R. DEDEKIND a donné en 1888, dans sa thèse « Was sind und was sollen die Zahlen », la définition suivante (X. 1) :

DÉFINITION. — Un ensemble M est dit : infini (unendlich) ou transfini, quand il existe un sous-ensemble aliquote de M qui peut être équivalent à M (le mot équivalent a le même sens que correspondant biunivoquement).

S'il n'existe pas un tel sous-ensemble aliquote, M est dit un ensemble fini.

Il est clair qu'un ensemble infini au sens de DEDEKIND n'est pas fini au sens ordinaire. Mais la question est intéressante : s'il existe un ensemble qui n'est ni infini, ni fini ? M. LEBESQUE a écrit : « Bien que je doute fort qu'on nomme jamais un ensemble qui ne soit ni fini, ni infini, l'impossibilité ne me paraît pas démontrée. » Cette question n'est pas une question du principe du tiers exclu, c'est seulement une question de la terminologie.

M. TARSKI a défini d'autre part la notion du fini de la façon suivante (XXIII, 2) :

DÉFINITION. — L'ensemble M est fini lorsque toute classe non-vidue N de ses sous-ensembles admet au moins un élément irréductible.

Définition auxiliaire : Élément irréductible d'une classe N d'ensemble est ensemble P tel que

1) $P \in N$,

2) aucun sous-ensemble aliquote de P n'appartient à N , c'est-à-dire que si $Q \subset P$, et $Q \in N$, on $Q = P$.

Ayant établi ces notions, nous allons examiner le nombre transfini.

Divisons tous les ensembles des nombres possibles en classes, en comprenant dans une même classe des ensembles qui ont même puissance. Désignons chaque classe par un symbole fixe en disant que c'est le nombre cardinal de cette classe. Pour les ensembles finis dans une même classe, c'est-à-dire qui ont le même nombre d'éléments, il sera plus simple et plus commode d'utiliser comme symbole correspondant au nombre cardinal, le nombre entier qui est le nombre des éléments de ces ensembles. Donc pour un ensemble ayant n éléments, le nombre cardinal est choisi comme n . Ainsi chaque nombre entier est un nombre cardinal correspondant à une certaine classe. En dehors de ces nombres entiers, il y a naturellement d'autres nombres cardinaux correspondant à la classe des ensembles infinis ; nous les appellerons : « nombres cardinaux transfinis », en distinguant les nombres cardinaux finis. Les nombres cardinaux présentent donc une généralisation des nombres naturels.

Il est évident que les nombres transfinis ont des propriétés différentes des nombres naturels. Tout d'abord leur existence est aussi une question.

Pour l'existence du nombre transfini, le théorème de Paul DU BOIS-REYMOND a une grande importance. Nous allons citer ici ce théorème avec quelques explications ; mais ce n'est pas la démonstration totale.

Si l'on désigne $f_1(x)=2x$, cette fonction de x a une propriété dite croissante, car quand x devient de plus en plus grand, il en est de même pour $f_1(x)$.

$$\begin{array}{ccccccc} f_1(x) & = & 2 & 4 & 6 & 8 & \dots 36\dots \\ x & = & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots 18\dots \end{array}$$

Considérons une autre fonction $f_2(x)=4x$. Il est évident que cette fonction $f_2(x)$ a les propriétés suivantes :

- I. elle est croissante ;
- II. quel que soit un nombre positif x ,

$$f_2(x) > f_1(x) > x.$$

Nous exprimons ce fait en disant que $f_2(x)$ est plus grand que $f_1(x)$. De même, il est facile de vérifier que la fonction $f_3(x)=x^2$ est plus grande que $f_2(x)$ à partir de $x=4$.

Le théorème de Paul DU BOIS REYMOND est qu'étant donnée une suite de fonctions croissantes

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots f_n(x), \dots$$

il existe toujours une fonction croissante plus grande que chacune d'elles à partir de certain nombre fini.

Comme cas analogue, on peut énoncer la proposition fondamentale :

Après tout nombre entier, il y en a un autre.

Cette proposition suffit-elle à nous donner tous les nombres transfinis ?

Quand nous disons qu'après tout entier, il y en a un autre, le mot « entier » signifie que cette suite de nombres est dénombrable. Donc, tout ce que cette proposition peut démontrer, c'est seulement l'existence du nombre transfini dénombrable, c'est-à-dire le nombre cardinal de la classe des ensembles dénombrables. Mais pour les autres nombres transfinis, comment existent-ils ?

Cette question est très difficile à expliquer. Nous ne pouvons pas discuter rigoureusement tout le calcul mathématique sur ce sujet, mais nous pouvons considérer ici simplement la proposition généralisée : après tout nombre il y en a un autre. *A priori*, nous pouvons dire, d'après cette proposition, qu'il existe des nombres transfinis autres que le nombre transfini déterminé tout à l'heure.

6. -- Axiome de Zermelo

En 1904, ZERMELO énonça l'axiome suivant :

Pout tout ensemble M dont les éléments sont des ensembles P non-vides et sans éléments communs deux à deux, il existe au moins un ensemble N qui contient un élément et un seul de chaque ensemble P qui appartient à M .

Il y a de nombreux mathématiciens qui affirment ne pas comprendre ce que veut dire cet axiome. Parce qu'il s'agit, dans cet axiome, d'une question d'existence de l'ensemble N dont la construction de cet ensemble est en général inconnue. Mais, en même temps, ils ne nient pas cet axiome, ils affirment seulement qu'il n'y a pas de sens exact dans cet axiome.

D'autre part, comme nous savions :

1° que de nombreux cas particuliers de l'axiome de ZERMELO se sont vérifiés ;

2° qu'on a tiré de l'axiome de ZERMELO une foule de conséquences dont aucune n'a conduit à une contradiction ;

3° que l'axiome de ZERMELO est dans l'état actuel de la science, indispensable pour la démonstration d'un grand nombre de théorèmes importants de la théorie des ensembles, et qu'il permet de simplifier ainsi considérablement différentes parties de ces sciences.

Ainsi, dans les mathématiques, on accepte cependant cet axiome. Mais comme il est mis en doute, il devient important de savoir qu'elles sont nécessairement démontrées à l'aide de cet axiome.

Il y a beaucoup de formes qui sont équivalentes à l'axiome de ZERMELO.

1° Il est équivalent à la proposition dite : le théorème de ZERMELO : tout ensemble peut être considéré comme un ensemble d'éléments d'un ensemble bien ordonné ou bien, tout simplement : tout ensemble peut être bien ordonné.

2° Il est équivalent à ce que l'on appelle l'axiome de trichotomie, qui peut être relaté sous la forme suivante :

Soient M et N deux nombres cardinaux respectivement les symboles correspondant aux ensembles M et N . S'ils sont finis, il est facile de voir qu'ils ont une des relations suivantes entre eux :

$$(1)M>N, (2)M=N, (3)M<N.$$

Selon les grandeurs des nombres naturels. Mais comment pourrions-nous dire quand ils seront transfinis ?

La convention générale suivante sera acceptée.

Si M et N sont deux ensembles dont les puissances sont respectivement les nombres cardinaux M et N . Si l'ensemble N a même puissance qu'un sous-ensemble de M mais l'ensemble M n'a pas la même puissance avec aucun sous-ensemble de N , nous exprimons ce fait en écrivant

$$M>N$$

Donc, il peut y avoir trois cas pour comparer deux nombres cardinaux :

$$(1)M>N, (2)M=N, (3)M<N.$$

Et il est clair qu'ils sont exclus entre eux.

Mais nous n'avons pas jusqu'ici le droit d'affirmer que M et N peuvent être toujours remis sous une de ces trois relations, parce qu'il faut démontrer l'impossibilité du cas où deux ensembles M et N étant donnés ni M n'a même puis-

sance avec aucun sous-ensemble de N , ni N n'a même puissance avec aucun sous-ensemble de M . Car si un tel cas avait lieu, M et N ne pourrait être remis sous aucune de ces trois relations.

Il a été démontré que ces cas sont impossibles, c'est-à-dire que : « il n'existe pas deux ensembles dont aucun n'aurait même puissance qu'un sous-ensemble de l'autre » (XXII. 2). Autrement dit :

Axiome de trichotomie : Deux nombres cardinaux peuvent être remis par une et une seule des trois relations.

Reprenons le théorème de ZERMELO.

Il s'agit d'abord de la question de la possibilité, puisque la définition de « bien ordonné » est une idée presque idéale. Pour un ensemble infini, nous ne savons pas réellement comment on peut bien ordonner cet ensemble ; par exemple, nous ne savons même pas comment bien ordonner l'ensemble de tous les nombres réels. Le théorème de ZERMELO affirme seulement alors l'existence, une possibilité de l'existence, mais il n'affirme pas que l'ensemble en question est réalisable ou non ; et, de plus, on sait qu'en général, bien ordonner un ensemble est non-effectif, c'est-à-dire, pour faire effectivement un ensemble bien ordonné est impossible, du moins jusqu'à présent.

Malgré que l'existence de cet ensemble bien ordonné soit non-réalisable, « il existe » c'est un fait mathématique ; et, de plus, cette existence exprime vivement l'existence pure de l'être mathématique. Les propositions établies à l'aide de cet axiome de ZERMELO sont nombreuses, particulièrement sur les caractères des nombres transfinis.

Par exemple on peut appliquer l'axiome de ZERMELO pour démontrer le théorème important : tout ensemble non vide qui n'est pas fini contient un sous-ensemble dénombrable.

Ce théorème est important parce qu'il montre deux choses :

- a) Si l'ensemble n'est ni vide, ni fini, il est infini ;
- b) Le nombre cardinal transfini correspond à la classe de tous les ensembles dénombrables est le plus petit nombre transfini.

La démonstration n'est pas très difficile, nous pouvons la relater de la façon suivante :

Soit M cet ensemble. Comme il est non-vide, on peut supposer que m_1 est un de ses éléments. Nous disons d'abord

qu'il existe pour tout nombre entier n , une suite de n éléments distincts dans l'ensemble M . Cette proposition est déjà vraie pour $n=1$, car m_1 est un élément de M . Par induction mathématique, supposons qu'elle soit vraie pour n , c'est-à-dire qu'il existe une suite $m_1, m_2, \dots, m_n$ de n éléments de M correspondant à n . Si elle n'est pas vraie pour $(n+1)$, donc m_n est le dernier élément de M , c'est une contradiction à l'hypothèse que M n'est pas fini. Donc, la proposition est aussi vraie pour $(n+1)$. Donc pour tout nombre entier n , il existe dans M une suite de n éléments correspondants.

D'après l'axiome de ZERMELO, nous en concluons qu'il existe une suite infinie de suites :

$$S_1 S_2 S_3 \dots S_n \dots$$

où

$$S_1 = (m'_1 m'_2 \dots)$$

est l'élément de M .

Considérons la suite infinie

$$(28) \quad m^1_1 m^2_1 m^2_2 m^3_1 m^3_2 m^3_3 \dots$$

que l'on obtient en développant $S_1 S_2 S_3 S_4 \dots$. Supprimons dans cette suite les éléments égaux à un des précédents, nous aurons les éléments distincts de M

$$(29) \quad m_1 m_2 m_3 \dots m_n \dots$$

La suite (29) ne peut pas être finie, car elle contient tous les termes de toute la suite $S_1 S_2 S_3 \dots$. Donc, le théorème est démontré.

Par conséquent l'existence d'un être mathématique pur non-effectif, comme l'axiome de ZERMELO l'a proposé, est inévitable par son utilisation et son application.

7. -- Induction transfinie

L'un des procédés de raisonnement les plus employés en mathématiques est l'induction complète que nous avons considérée au chapitre dernier. C'est un passage du fini à l'infini. On vérifie qu'une proposition est vraie si les nombres entiers qui figurent dans son énoncé sont assez petits. On démontre ensuite qu'elle subsiste, si l'un quelconque de ces nombres augmente d'une unité, et l'on en conclut qu'elle est vraie pour des entiers quelconques. Cette méthode de la dé-

monstration a été généralisée de telle façon que, si une proposition est vraie pour un nombre assez petit des éléments d'ensemble R-héréditaire, elle peut être vraie pour tout élément de cet ensemble, comme nous avons vu au chapitre III.

Mais tout ce que nous avons considéré, l'ensemble des entiers ou l'ensemble quelconque correspondant à l'ensemble des entiers, est l'ensemble dénombrable. Donc, une question se pose d'après l'établissement des nombres transfinis : est-il bien d'admettre l'induction complète s'étendant, non plus seulement à l'ensemble dénombrable des nombres entiers, mais à l'ensemble quelconque même non-dénombrable des nombres ?

Nous allons résumer la théorie de M. SIERPINSKI sur ce sujet de la manière suivante :

Nous appelons, comme au premier chapitre, un ensemble bien ordonné, un ensemble ordonné dont tout sous-ensemble non-vide a un premier élément, et nous nous servons du signe $a < b$ en exprimant que b est un élément suivant de a . Un exemple, l'ensemble dont le type d'ordre est ω que nous avons considéré au chapitre premier, est, comme on le voit sans peine, bien ordonné et aussi tout ensemble fini ordonné est aussi bien ordonné.

Soient B un ensemble bien ordonné et E un ensemble quelconque tel que :

1° E contient le premier élément de B,

2° Si a est un tel élément de B que tout élément de B qui précède a appartient à E alors a appartient à E.

On constate alors que tout élément de B est aussi un élément de E, symboliquement $B \subset E$.

Démonstration :

Sinon, alors posons $C = B - E, C \neq 0$. Comme $C \subset B$, d'après la définition de l'ensemble bien ordonné, $a \in C$ un élément premier. Soit a cet élément premier de C. Deux cas se produiront :

1. a est aussi le premier de B. D'après la propriété 1°, $a \in E$; c'est une contradiction de $a \in C$ dont $C = B - E$.

2. a n'est pas le premier de B. Soit a' un élément de B tel $a' < a$; a' n'appartient pas à C, car a est le premier élément de C. Donc, $a' \in E$. D'après la propriété 2° $a \in E$ comme $a' \in E$. C'est une contradiction de $a \in C$.

Donc $B \subset E$.

Inversement, il est facile de démontrer que si B satisfait cette propriété, il est bien ordonné.

Cette propriété de B est établie alors comme une propriété caractéristique pour que B soit bien ordonné. Désignons cette propriété par P.

De plus, soient B un ensemble ordonné et $f(x)$ une fonction propositionnelle concernant une variable x qui peut être vraie ou non lorsqu'on remplace par un élément de l'ensemble B. Soit $f(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Si a est le premier élément de B, $f(a)$ est vraie.

b) Si a est un élément de B tel que $f(x)$ est vraie pour tout élément x de B qui précède a , $f(a)$ est vraie.

On dit la propriété, propriété P_1 , qui est la propriété de l'ensemble ordonné B ayant un premier élément, et rendant vraie toute proposition $f(x)$ qui satisfait aux conditions a) et b).

Cette propriété P_1 qui peut être regardée comme une généralisation du principe de l'induction complète, a été appelée par M. SIERPINSKI le principe d'induction transfinie, car elle peut être appliquée aux ensembles transfinis. Et elle a été démontrée par lui comme une équivalence de la propriété P.

Supposons que l'ensemble B satisfasse P et que la fonction $f(x)$ satisfasse aux conditions a) et b). Soit E un ensemble tel que :

V. $E.f(x)$

D'après la condition a), on aura

1° $a \in E$

où a est le premier élément de B.

D'après la condition b), on aura

2° si $a' < a$, et $a' \in E$ et que

V. : $f(a')$

alors

V. : $f(a)$

c'est-à-dire

$a \in E$.

Ces résultats obtenus sont exactement les mêmes que les conditions 1° et 2° de la propriété P.

Donc la propriété P_1 entraîne la propriété P. D'une manière analogue, la propriété P entraîne aussi la propriété P_1 .

La propriété P appartient toujours aux ensembles bien ordonnés, et seulement aux ensembles bien ordonnés. Donc, pour que le principe d'induction transfinie soit applicable à

un ensemble, il faut et il suffit que cet ensemble soit bien ordonné.

Donc, il est clair qu'une fonction propositionnelle $f(x)$ peut être démontrée vraie pour tout ensemble B fini, infini dénombrable, ou infini non-dénombrable, par l'induction mathématique, si et seulement si l'ensemble B est bien ordonné, satisfaisant la propriété P , et la fonction propositionnelle $f(x)$ a une propriété P_1 définie plus haut.

8. -- Conclusion

D'après notre étude de ce chapitre, la conception de l'existence mathématique se différencie nettement de celle de l'existence empirique. Nous pouvons, en mathématiques, établir n'importe quelle définition, et affirmer que le concept (ou la classe) défini existe, sans que la question se pose si elle est réalisable ou non-réalisable, mais la seule chose importante est qu'elle soit possible. Pour la possibilité, nous considérons deux conditions :

1° que le concept considéré ne soit pas contradictoire en lui-même ;

2° que le concept ne soit pas contradictoire avec toutes nos propositions primitives.

Une démonstration négative, en démontrant l'existence des éléments d'un ensemble par la propriété aliquote de son complémentaire, montre aussi seulement la possibilité de l'existence qui est en question.

Ainsi, après avoir démontré que le lieu des points également distants d'un point fixe est existant on pourra nommer ce lieu « cercle » et on affirmera son existence sans savoir si le cercle est réalisable. Nous pouvons définir un triangle et affirmer son existence, parce que le concept d'un triangle est possible. Nous pouvons construire un triangle avec trois droites qui se coupent deux à deux, bien que l'on ne puisse jamais tracer sur le tableau noir un triangle géométrique tout à fait correct, comme l'on a défini, et bien que l'on ne puisse pas réaliser un véritable triangle. Mais, parce que le concept d'un triangle a la possibilité, comme il n'arrive jamais une contradiction, son existence est acceptée partout.

Le nombre transfini et l'axiome de ZERMELO montrent plus clairement cette nature de l'existence mathématique, comme nous avons vu dans ce chapitre. Donc l'existence mathématique peut être possible et peut être réalisable. Un être existant réalisable doit être possible, mais s'il est seulement possible, il n'est pas nécessairement réalisable.

CHAPITRE V

SUR LA PROBABILITE

1. -- La logique de la certitude et la logique de la probabilité

Etant donnés des faits différents, on peut les connaître par l'observation, par l'expérience ou par une autre méthode intuitive, directe ou indirecte. De l'examen d'un fait, peuvent résulter deux cas différents : ou bien ce que nous avons obtenu du fait de cet examen est positif, c'est-à-dire que le domaine de notre connaissance s'augmente de cette expérience ; ou bien nous n'avons rien appris, malgré notre minutieux examen, c'est-à-dire que notre connaissance ne s'est pas augmentée. Dans le premier cas, nous pouvons encore distinguer : si nous avons examiné notre objet parfaitement, de telle manière que nous pouvons établir un jugement très sûr et très précis ; ou bien si nous ne l'avons pas étudié parfaitement, de sorte que notre connaissance à son sujet est incomplète.

Toute notre connaissance est divisée selon les cas précédents. Un mode spécial de connaissance, la connaissance scientifique, qui a été reconnue comme la plus précise parmi toutes nos connaissances, sera aussi caractérisée par ces deux cas. La science nous permet de prévoir, « science d'où prévoyance » (A. COMTE). Chaque fois que les faits nous sont donnés, ses prévisions sont précises d'après les lois que cette science a préconisées. Pour établir le principe des prévisions sur lequel repose presque tout le raisonnement scientifique, l'élément le plus important est ce que nous appelons aujourd'hui le principe de causalité. Il peut s'énoncer : tout a une cause et dans les mêmes conditions, la même cause est suivie

du même effet. C'est la deuxième partie de ce principe : que la même cause est suivie du même effet, on a le droit de prévoir, on a le droit d'établir ce que nous appelons la méthode scientifique.

Il apparaît quelquefois notre prévision qu'elle n'est pas sûre, ou bien on sait par avance que notre prévision ne peut pas être sûre. Dans ce cas, notre prévision a une propriété probable, au lieu de sa certitude ordinaire. Notre connaissance sur ce fait considéré est alors partielle, et n'est pas complète.

J. BERNOULLI a considéré la connaissance comme une quantité ; la certitude est cette quantité entière, c'est-à-dire que nous avons une connaissance complète ; la probabilité en est une fraction, c'est-à-dire que notre connaissance est partielle. On peut alors exprimer la certitude par 1, et dès lors représenter par différentes fractions, les différents degrés des probabilités. La quantité zéro exprime le fait dont on n'a aucune connaissance. Si nous représentons par N la connaissance totale sur un événement qui se présentera, et par n la connaissance que nous avons déjà sur ce sujet, le quotient n/N sera la probabilité. Si $n=N$, la probabilité deviendra la certitude, c'est-à-dire que si notre connaissance sur un sujet est parfaite, d'après le principe de causalité, nous sommes sûrs de notre prévision. Par conséquent, la science se divise en deux catégories d'études selon la certitude et la probabilité. La mathématique proprement dite est l'étude de la certitude, tandis que la statistique est l'étude de la probabilité.

Comme nous avons dit que la logique a pour but l'étude des conditions de la vérité des propositions, spécialement des propositions scientifiques, ou plus précisément qu'elle est l'étude des règles, des méthodes et des procédés qui nous permettent d'atteindre la vérité des sciences, il en résulte que la logique doit aussi étudier séparément les deux sortes de règles employées pour la science de la certitude et la science de la probabilité.

La première constitue alors la logique de la certitude, ce qui nous permet d'avoir une conclusion certaine, vraie toujours, ou fausse toujours. Les principes fondamentaux que nous avons énoncés au chapitre III, appartiennent à cette

logique de la certitude, ainsi pour presque toute la partie de la logique classique.

La deuxième constitue la logique de la probabilité ; elle nous permet de trouver une conclusion probable qui a la possibilité de devenir vraie en même temps que la possibilité de devenir fausse. Par ce qui est étudié dans cette logique de la probabilité, il nous est permis aussi d'établir une comparaison entre les degrés des probabilités.

2. -- Le principe de la participation

La nouvelle théorie de la probabilité est fondée sur la théorie des ensembles. Le principe fondamental pour cette théorie est le principe de la participation.

Soit un ensemble de choses quelconques, soit défini par extension, soit défini par compréhension. S'il est connu que l'un des éléments de E possède effectivement le caractère A , mais si l'on ne sait pas définitivement lequel, il en résultera la possibilité pour chaque élément de l'ensemble E d'être porteur de ce caractère connu. Par exemple : « Le malfaiteur que la justice recherche a les cheveux roux ; l'homme que l'on vient d'arrêter a les cheveux roux ; il est donc possible que cet homme soit celui que la justice recherche ». Presque tous les soupçons d'un crime sont la conséquence de cette raison. On dit que cette raison est basée sur le principe de la participation.

Plus généralement, considérons un ensemble F . Supposons que F est défini par compréhension et que f est la nature caractéristique de F tel que tout élément de F a cette nature f , et inversement un objet qui a cette nature f est un élément de F . Soit E un sous-ensemble de F , caractérisé par un certain caractère e . Les caractères e et f sont indépendants logiquement ; c'est-à-dire que ni e n'est compris dans f , ni e est impliqué par f ; puisque, sinon, l'existence de F entraînerait celle de E , et e devrait être comme f , une propriété commune à tous les éléments de F , et par conséquent il n'est pas une propriété caractéristique de E . Si l'on tirait un élément de F , il est possible qu'il soit aussi un élément de E , c'est-à-dire qu'il aurait le caractère e . Cette possibilité

est clairement une fonction croissante du nombre de la population de l'ensemble E . Autrement dit, la possibilité d'un élément de F d'être un porteur du caractère e est une fonction croissante du nombre cardinal de l'ensemble E , au cas que l'ensemble E est fini.

Soient trois boules blanches et cinq boules noires dans une urne U_1 , et cinq boules blanches et trois boules noires dans une urne U_2 . On voit sans peine qu'il est plus possible de tirer une boule blanche de U_2 que de tirer une boule blanche de U_1 dont les deux urnes ont un même nombre de boules. C'est seulement parce que le nombre cardinal de l'ensemble des boules blanches de l'urne U_2 est plus grand que le nombre cardinal de l'ensemble des boules blanches de l'urne U_1 .

Le principe fondamental de la participation est le principe fondamental de la théorie des probabilités. Tout le calcul des probabilité est fondé sur ce principe. Il consiste principalement en deux caractères fondamentaux : transmission et répartition.

TRANSMISSION

Principe. — Etant donné un ensemble E fini (ou non) d'objets quelconques, si l'on sait qu'un caractère A aurait lieu à un de ses éléments, ou plus généralement à tout un ensemble F aliquote de E , A aurait lieu à tous les éléments de E , si l'on ne connaît pas définitivement cet élément ou ce sous-ensemble.

Ce caractère A est dit transmissible parmi l'ensemble E . L'exemple que nous venons de donner exprime que le caractère d'être un malfaiteur est transmissible à tous les hommes qui ont les cheveux roux. La transmission pour un caractère A parmi un ensemble E a lieu seulement quand nous ne savons pas définitivement lequel des éléments de E a ledit caractère. Elle s'arrête si l'on sait bien quel élément est définitivement porteur de ce caractère. Ceci est très important quand on veut utiliser le principe de la participation.

RÉPARTITION

Le deuxième élément du principe de la participation est la répartition. Sous le nom de répartition, nous entendons le

caractère de A qu'il répartit également parmi les éléments de E de telle sorte que chaque élément de E a la même possibilité de porter le caractère connu. Parmi l'ensemble de dix hommes ayant les cheveux roux, la justice peut soupçonner que l'un d'entre eux est un malfaiteur, sans savoir lequel. Si la situation pour les dix hommes d'être soupçonnés est tout à fait la même, le soupçon de la justice sera également réparti sur les dix hommes, c'est-à-dire qu'il y aura pour chacun d'eux le même degré de possibilité d'être un malfaiteur.

L'égalité de ces possibilités est basée uniquement sur l'appartenance à l'ensemble considéré. Mais comment établit-on cette équipossibilité et pourquoi peut-on l'établir ? LAPLACE a donné la brève explication suivante : « Cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également dans l'indécision sur leur existence ». Cette explication n'est pas très claire. Nous pouvons la modifier et la transformer sous une forme plus précise, un principe négatif : le principe de la raison manquante (IX).

LE PRINCIPE DE LA RAISON MANQUANTE

Les cas doivent être envisagés comme également possibles, lorsque dans l'état actuel de nos connaissances, nous ne pouvons discerner aucune raison d'evisager l'un comme plus probable qu'un quelconque des autres. Autrement dit, si dans un cas où il nous manque une raison de faire une différence entre les relations de tous les éléments de E et le caractère A connu d'avance, nous disons que le caractère A est également réparti sur tous les éléments de E.

Prenons, par exemple, le jet d'un dé. Supposons que le dé soit symétrique, idéalement parfait pour les six faces ; on affirme que les diverses faces auront la même probabilité de chute. Ce n'est pas par l'expérience que l'on peut obtenir ce résultat. C'est seulement parce qu'il manque la raison pour qu'une face spéciale ait une probabilité plus grande que les autres. Pour le tirage de la loterie, on peut raisonner de la même manière : tous les numéros ont la même possibilité d'être tirés, car l'on ne trouve pas une raison pour qu'un numéro, 123456 par exemple, soit plus favorisé qu'un autre numéro, 111111.

3. -- Notions de la probabilité

C'est grâce à la théorie des probabilités que la science de la certitude a subdivisé en une nouvelle science, la science de la probabilité. Les physiciens modernes expliquent les propriétés les plus cachées de l'énergie et de la matière par la probabilité. Les biologistes arrivent à pénétrer par les lois de l'hérédité, permettant ainsi aux agronomes de sélectionner des races d'animaux et de plantes, et les assurances, la prévoyance sous toutes ses formes, utilisent constamment le calcul des probabilités. Le calcul des probabilités intéresse alors les artilleurs, les astronomes, et aussi le statisticien et le philosophe.

D'après le développement de la théorie des ensembles on sait que presque toutes les branches des mathématiques l'ont utilisée. La probabilité l'utilise aussi. Pour définir la notion de la probabilité, nous définirons d'abord quelques notions utiles.

NOTION A. — On dit qu'un ensemble E est bien défini, si l'on peut décider qu'une chose quelconque donnée appartient ou non, à cet ensemble.

NOTION B. — Soit E un ensemble défini par compréhension. Soient A un caractère commun à tous les éléments de E , et F un sous-ensemble de E . Comme E est plus grand que F en extension, la compréhension de F doit comprendre la compréhension de E . Soit $(A+B)$ le caractère commun à tous les éléments de F . Il peut arriver trois cas différents :

i. $Ac(A+B)$.

C'est tout naturel, quand $(A+B)$ est plus grand que A . Alors F est un sous-ensemble aliquote de E , c'est-à-dire FcE . Le caractère porté par chaque élément de l'ensemble F est, bien entendu, plus grand que celui porté par l'élément qui appartient à E mais n'appartient pas à F . Par exemple, prenons $E=E$ (1 2 3 4 ...n...) tous les nombres entiers, et $F=F$ (2 4 6 8 ...2n...) tous les nombres pairs. Comme FcE , le caractère *pair* est un caractère commun à tous les éléments de F mais n'est pas un caractère commun à tous les éléments de E . Mais, inversement le caractère commun à E est aussi un caractère commun à F .

ii. $B=A$.

C'est le cas quand F est un sous-ensemble de E , mais n'est pas un sous-ensemble aliquote. Dans ce cas, il se présente que $E=F$.

iii. $B=O$.

Si $B=O$, l'ensemble F n'existe pas.

Sous le calcul de la probabilité, nous étudierons naturellement le seul cas, cas i, où F est un sous-ensemble aliquote de l'ensemble E .

NOTION C. — Nous appellerons le cas équipossible des éléments appartenant à un même ensemble. Comme nous venons de dire que l'équipossibilité est fondée sur le principe de la participation — l'appartenance d'un élément à un ensemble considéré, et que la possibilité est une fonction croissante du nombre cardinal du sous-ensemble, donc on peut voir sans peine que deux sous-ensembles d'un même ensemble fini sont équipossibles s'ils ont même nombre cardinal.

NOTION D. — Nous définirons la probabilité qu'un élément de l'ensemble fini E appartiendra à son sous-ensemble F , le rapport des nombres cardinaux de F et de E . C'est aussi la probabilité pour l'un des éléments de E d'être porteur du caractère A , caractéristique du sous-ensemble F .

Si l'on désigne par e et f les nombres cardinaux respectivement les ensembles E et F , alors cette probabilité p est définie par la formule suivante :

$$(30) \quad p=f/e.$$

Après avoir défini ces notions, considérons maintenant le sens de la probabilité.

La théorie des probabilités est une théorie mathématique ; son but est l'explication de phénomènes physiques. Elle s'applique aux cas où la démonstration formelle est impossible. Quand la certitude ne peut pas être atteinte, cette théorie donne des règles qui permettent de savoir le degré plus ou moins élevé de croyance qu'un ensemble de considérations nous permet à l'égard d'une thèse donnée.

La logique proprement dite a pour but de trouver la vérité ou la fausseté d'une proposition. Mais la vérité ou la fausseté sont établies par rapport à un ensemble de propositions qui a été supposé vrai à l'avance. Ces propositions primitives sont des axiomes, postulats ou hypothèses, qui constituent

alors l'ensemble fondamental des prémisses de la démonstration. Prenons par exemple :

Exemple I :

PRÉMISSES :

A. Tout homme est mortel.

B. Socrate est homme.

CONCLUSION :

Socrate est mortel.

Exemple II :

PRÉMISSES :

A. Si deux triangles ont leurs angles égaux, ils sont semblables.

B. Si deux triangles ont leurs côtés parallèles, ils ont leurs angles égaux.

CONCLUSION :

Si deux triangles ont leurs côtés parallèles, ils sont semblables.

Les deux exemples ci-dessus, dont l'un, — l'exemple I — est un syllogisme catégorique ; et l'autre — l'exemple II — un syllogisme hypothétique, nous montrent que la conclusion est toujours un résultat immédiatement suivi des prémisses. Ces conclusions sont toujours vraies, si et seulement si les prémisses sont vraies, desquelles la vérité est toujours affirmée, parce que ce n'est pas la responsabilité de ce syllogisme.

Donc, étant donné des prémisses désignées symboliquement par *p* et une conclusion désignée symboliquement par *c*, il se dégage toujours du syllogisme ordinaire une conclusion *c* suivie nécessairement et suffisamment de prémisses *p*. On dit ici « nécessairement » parce que si la forme du syllogisme est logique, une conclusion est nécessaire. On dit ici « suffisamment » parce que si le syllogisme est vrai, une conclusion *c* est suffisamment déduite des prémisses *p*. On peut exprimer ce résultat que les prémisses *p* entraînent suffisamment la conclusion *c* par le symbole *implication*

ccp.

Dit « *si p est vrai, c est vrai* » qui a naturellement le même sens que l'implication du chapitre III.

Envisageons maintenant les exemples suivants :

Exemple III :

PRÉMISSES p.

A. Les deux boules, dans cette urne, sont blanches.

B. Cette boule a été tirée de cette urne.

CONCLUSION c.

Cette boule est blanche.

Ce syllogisme est tout à fait le même que celui de l'exemple I, il est donc aussi une des formes ccp. Mais si l'on en change la prémisse A par A'.

A'. Deux boules : une blanche et une noire, sont dans cette urne.

La conclusion c est-elle aussi vraie ? on ne peut pas répondre à cette question parce que les prémisses ne sont pas suffisamment données pour obtenir une conclusion certaine. La conclusion, c'est, ni vraie, ni fausse. Elle est probable, c'est-à-dire qu'il est possible que c soit vrai, mais n'est pas toujours vrai.

Exemple IV :

PRÉMISSES p.

A. Tout nombre entier est pair ou impair.

B. x est un nombre entier.

Si je veux une conclusion c : « x est un nombre pair », les prémisses p n'entraînent pas nécessairement la conclusion c. Désignons l'ensemble des nombres entiers par E, et l'ensemble de nombres pairs par F. Cette question que p n'entraîne pas nécessairement c se rapporte à notre notion (B). La conclusion c aura la possibilité d'être vraie, mais ne sera pas toujours vraie. Quand une telle circonstance entre les prémisses p et la conclusion c telle que c est possible, mais n'est pas une conséquence nécessaire des prémisses p. se présente,

on dit qu'il y a une relation de la probabilité entre p et c . Nous la désignerons par le signe :

$$c/p.$$

C'est-à-dire « *il est possible que p implique c* ».

D'après notre notion (C) formule 30, il est clair que si l'ensemble E est fini, f est son nombre cardinal, on peut exprimer par :

$$(31) \quad c/p = f/e$$

la probabilité qu'un élément de E porte un caractère A de F qui est un sous-ensemble de E avec le nombre cardinal f .

Cette définition de la probabilité par l'ensemble est tout à fait la même que la définition ordinaire qui peut être mise sous la forme suivante :

DÉFINITION. — La probabilité d'un événement s'obtient par le quotient du nombre des cas favorables à l'arrivée de cet événement, par le nombre total des cas possibles.

Il est facile de voir que le nombre des cas favorables est le nombre cardinal du sous-ensemble F , et le nombre total des cas possibles est le nombre cardinal de l'ensemble E . Donc on a aussi la formule 31.

4. -- Syllogisme probable

Rappelons-nous tout d'abord le sens des jugements opposés.

En logique, deux jugements sont dits opposés, s'ils sont formés des mêmes termes et différents en qualité ou quantité, ou à la fois en quantité et en qualité. Ainsi on peut avoir quatre sortes d'oppositions :

1° CONTRADICTOIRE. — Opposition à la fois en quantité et en qualité : ils ne peuvent donc être, ni tous deux vrais, ni tous deux faux

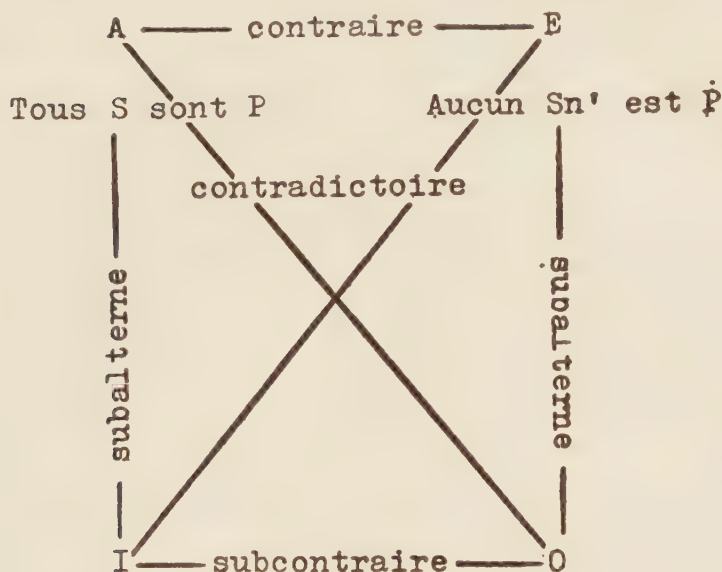
2° CONTRAIRES. — Opposition en qualité, tous totaux : ils sont, l'un affirmatif, et l'autre négatif. Ils ne peuvent être tous deux vrais, mais ils peuvent être tous deux faux.

3° SUBCONTRAIRES. — Opposition en qualité, toutes deux indéterminées : ils peuvent être tous deux vrais, mais ils ne peuvent pas être tous deux faux.

4° SUBALTERNES. — Opposition en quantité : ils ont même qualité.

On peut les résumer par le tableau suivant :

TABLEAU III



Quelques S sont P.

Quelques 'S ne sont pas P.

Pour mieux comprendre ce que les phrases « tous S sont P », « Quelques S sont P », etc., il est facile de considérer que S et P sont des ensembles. La proposition « Tous S sont P » signifie alors ScP ; c'est-à-dire S est un sous-ensemble de P. La proposition « Quelques S sont P » signifie alors scP , à la condition que scS ou bien $s\S$; c'est-à-dire que « il y a un sous-ensemble de S (ou un élément de S) qui est aussi un sous-ensemble de P ». Ainsi « aucun S n'est P » signifie $S \cdot P = O$. « Quelques S ne sont pas P » signifie $s\S$ ou scS entraîne $s \cdot P = O$.

Considérons maintenant le syllogisme catégorique de la seconde catégorie (formule 15) :

p : Tout B est C,
 A : Tout A est B,
 c : Tout A est C.

Nous désignons ici le syllogisme par A selon que la mineure est une proposition A (affirmative du mode, et affirmative du dictum). Ainsi nous désignons les syllogismes suivants par I, O et E, selon les modes et les dictums des mineures.

- p : Tout B est C,
 I : Quelques A sont B,
 c : Quelques A sont C.
 p : Tout B est C,
 O : Quelques A ne sont pas B,
 c : Quelques A ne sont pas C.
 p : Tout B est C,
 E : Aucun A n'est B,
 c : Aucun A n'est C.

Envisageons les formes ci-dessus, les premières deux formes A et I sont vraies toujours et elles sont de la forme ccp. La conclusion de chaque syllogisme A ou I est une conséquence suffisamment obtenue de ses prémisses. Ce sont donc les syllogismes de la certitude. On peut toujours l'exprimer sous la forme « il est certain que c est vrai, si p est vrai ».

Mais les deux dernières formes qui sont obtenues respectivement par la substitution des propositions contradictoires aux mineures des syllogismes A et I, ne sont pas toujours vraies, mais elles ne sont pas non plus toujours fausses. Car les conclusions ne sont pas les propositions proprement dites, elles n'ont pas de valeur logique déterminée ; elles peuvent être vraies et elles peuvent être fausses. En effet, elles sont probables. Autrement dit, les conclusions de O et E sont vraies probablement ; elles expriment des relations entre c et p dites : la probabilité : « il est probable que c est vrai, si p est vrai », ou bien, « il est possible que c est vrai, si p est vrai ». Donc c peut être une conséquence de p, mais n'est pas une conséquence nécessaire de p. On exprime ce fait, comme on l'a déjà utilisé, par le signe c/p.

Symboliquement, soient A, B et C trois ensembles, et « a » un sous-ensemble de A. Le symbole AcB exprime « tout A est B » et le symbole A/B exprime « il est possible que tout A est B ». Donc les deux syllogismes de la certitude peuvent être écrits sous les formes suivantes :

A : $(AcC):c:(BcC)-(AcB)$.

I : $(acC):c:(BcC)-(acB)$.

ou : acA ou $a\sum A$.

Et les deux autres de la probabilité, sont les suivants :

O : $a/c(C) : c : (BcC) \cdot [acc(B)]$.

E : $A/c(C) : c : (BcC) \cdot [Acc(B)]$.

où : acA ou : $a\Sigma A$.

dont $c(A)$, $c(B)$, et $c(C)$ sont respectivement les complémentaires des ensembles A , B , et C . Les conclusions $a/c(C)$ et $A/c(C)$ sont probables.

Exemples :

SYLLOGISME PROBABLE DE LA FORME O.

p : Tout poisson respire par des branchies.

Cet animal n'est pas un poisson.

c : (Il est possible que) Cet animal ne respire pas par des branchies.

SYLLOGISME PROBABLE DE LA FORME E.

p : Tout poisson respire par des branchies.

La baleine n'est pas poisson.

c : La baleine ne respire pas par des branchies.

Les syllogismes probables que nous venons d'indiquer, ne sont pas encore ceux que l'on utilise souvent dans la théorie de la probabilité. Les syllogismes utilisés dans le calcul des probabilités sont les suivants :

Changeons la mineure du syllogisme A par « Tout A est C » une proposition aussi affirmative totale, mais son sujet est l'attribut de la mineure de A et au contraire son attribut est le sujet de la mineure de A. On peut établir à partir de lui aussi, quatre formes analogues, dites A', I', O', et E'.

	p :	Tout B est C,
A' :		Tout A est C,
	c :	Tout A est B.
	p :	Tout B est C,
I' :		Quelques A sont C,
	c :	Quelques A sont B.
	p :	Tout B est C,
O' :		Quelques A ne sont pas C.
	c :	Quelques A ne sont pas B.

p : Tout B est C,
 E' : Aucun A n'est C,
 c : Aucun A n'est B.

Il est facile de voir que les deux premiers syllogismes sont les syllogismes de la probabilité, et les deux derniers sont ceux de la certitude ; c'est-à-dire que les formes A' et I' sont c/p, et les formes O' et E' sont ccp. Symboliquement, ils sont énoncés sous les formes suivantes :

A' : $A/B:c:(BcC) \cdot (AcC)$,
 I' : $a/B:c:(BcC) \cdot (acC)$,
 O' : $acc(B):c:(BcC) \cdot [acc(C)]$,
 E' : $Acc(B):c:(BcC) \cdot [Acc(C)]$,

ou : acA , ou : $a\sum A$.

Les formes A' et I' sont les principes que le calcul des probabilités a utilisés. Ils sont en effet le principe de la participation que nous avons cité plus haut.

Exemples :

SYLLOGISME PROBABLE DE LA FORME A'.

p : Tout Mammifère respire par des poumons.
 La baleine respire par des poumons.
 c : La baleine est un mammifère.

SYLLOGISME PROBABLE DE LA FORME I'.

p : Cinq boules blanches sont dans une urne U contenant dix boules.

x est une boule tirée de U.
 c : x est une boule blanche.

La seule cause pour laquelle on peut avoir une conclusion de la forme c/p, par exemple dans le syllogisme A', la seule cause pour laquelle on peut dire « la baleine est un mammifère » est l'appartenance de l'ensemble, ou bien la participation de l'ensemble. C'est par le principe la transmissibilité que la baleine pourrait avoir le même caractère commun du sous-ensemble (tous mammifères).

Il est évident que, d'après nos huit formes des syllogismes, si A est une forme de la certitude, c'est-à-dire si la conclusion de ce syllogisme exprime une certitude, la contradictoire

de A, le syllogisme O, est une forme de la probabilité, c'est-à-dire que la conclusion de O est probable. Ainsi pour tous les autres syllogismes et leurs contradictoires. On peut regarder ceci comme une des propriétés des jugements contradictoires.

5. -- Quelques natures de la probabilité

a) Considérons un ensemble des prémisses p et deux propositions c_1 et c_2 . Examinons les expressions suivantes :

i. $(c_1 + c_2)cp$;

ii. $(c_1 + c_2)/p$.

Ici, la somme $(c_1 + c_2)$ est la somme logique des propositions c_1 et c_2 . Si c_1 et c_2 sont deux ensembles, $(c_1 + c_2)$ est l'ensemble de la somme de c_1 et c_2 . Comme nous avons indiqué qu'il y a une analogie entre le calcul des ensembles et le calcul des propositions, nous pouvons traiter c_1 et c_2 comme deux ensembles, si cela est plus commode ; tandis que les résultats seront aussi valables quand nous regarderons c_1 et c_2 comme les propositions.

i. $(c_1 + c_2)cp$.

Exemple I :

p :

A. Une urne U contient une boule blanche et une boule noire ;

B. Cette boule est une boule tirée de cette urne.

c_1 : Cette boule est blanche.

c_2 : Cette boule est noire.

$c_1 + c_2$: Cette boule est blanche ou cette boule est noire.

Cet exemple montre trois expressions : c_1/p , c_2/p , et $(c_1 + c_2)cp$. La troisième est une implication, elle est toujours vraie, si p est vrai.

ii. $(c_1 + c_2)/p$.

Exemple II :

p :

A. Une urne U contient une boule blanche, une boule noire, et une boule rouge.

B. Cette bouel est celle tirée de U.

c_1 : Cette boule est blanche.

c_2 : Cette boule est noire.

$c_1 + c_2$: Cette boule est blanche ou bien cette boule est noire.

Cet exemple montre trois expressions, toutes sont probables : c_1/p , c_2/p , et $(c_1 + c_2)/p$. Mais il est clair que la dernière est la plus possible. Si l'on ajoute une troisième proposition c_3 .

c_3 : Cette boule est rouge,

la proposition $(c_1 + c_2 + c_3)$ sera certaine. L'expression $(c_1 + c_2 + c_3)/p$ deviendra $(c_1 + c_2 + c_3)cP$ un syllogisme de la certitude.

b) Comme d'habitude, nous désignons par « $\neg c$ » dit « non-c » la négation de la proposition, ou bien le complémentaire de l'ensemble c .

Soient p un ensemble des prémisses, c une proposition telle que c/p . Par le principe du tiers exclu, il est évident que, ou bien c est vrai, si ce n'est pas le cas $\neg c$ sera vrai. Donc, la vérité de p entraîne toujours la vérité de la somme $(c + \neg c)$, c'est-à-dire :

$$(32) \quad (c + \neg c)/p = 1.$$

Si l'on a considéré des ensembles, supposons p un ensemble fini quelconque, (c) et $(\neg c)$ deux sous-ensembles de p , complémentaires entre eux. D'après notre formule (1), le nombre cardinal de l'ensemble $(c + \neg c)$ est égal au nombre cardinal de l'ensemble p . Donc, par la formule (31), on aura aussi la formule (32).

Si $(\neg c)$ est une proposition toujours fausse, ou bien au cas de l'ensemble, si $(\neg c)$ est un ensemble vide, la formule (32) deviendra :

$$c/p = 1.$$

Ceci signifie que « si p est vrai, c est toujours vrai ». Ce n'est pas autre chose que l'implication « $c \supset p$ ». Donc, on a la définition suivante :

$$\text{Df}_5 \quad p \supset c := c/p = 1.$$

C'est la définition de l'implication à l'aide du signe probabilité.

c) Soient p un ensemble des prémisses, c_1 et c_2 deux propositions. Considérons les propositions :

$$c_1 \cdot c_2, \quad c_1 \supset c_2, \quad \neg c_1 \cdot c_2, \quad \text{et} \quad \neg c_1 \supset c_2.$$

Reprenons l'exemple II dont nous venons de parler. Les quatre produits de propositions peuvent être écrits comme suit :

$c_1 \cdot c_2$: Cette boule est blanche et noire à la fois.

$c_1 \text{---} c_2$: Cette boule est blanche, mais n'est pas noire.

$\text{---} c_1 \cdot c_2$: Cette boule est noire, mais n'est pas blanche.

$\text{---} c_1 \text{---} c_2$: Cette boule n'est ni blanche, ni noire.

On voit sans peine que les trois derniers ont toutes les possibilités. Mais il est impossible que le premier cas soit vrai.

Nous allons maintenant donner deux formules fondamentales du calcul de la probabilité, qui sont aussi valables pour le calcul des propositions. Pour la commodité, considérons c_1 , c_2 et p comme des ensembles dont c_1 et c_2 sont deux sous-ensembles de p qui est un ensemble fini. L'analogie pour que p soit un ensemble des prémisses, et c_1 et c_2 soient deux propositions telles que c_1/p et c_2/p , est bien claire.

Soient N , a , b , c , et d les nombres cardinaux des ensembles respectivement p , $c_1 \cdot c_2$, $c_1 \text{---} c_2$, $\text{---} c_1 \cdot c_2$, et $\text{---} c_1 \text{---} c_2$. D'après définition (31) on aura :

$$c_1/p = a + b/N$$

puisque

$$c_1 = c_1 \cdot c_2 + c_1 \text{---} c_2.$$

De même,

$$\begin{aligned} c_2/p &= (a + c)/N \\ (c_1 + c_2)/p &= (a + b + c)/N \\ c_1 \cdot c_2/p &= a/N. \end{aligned}$$

On a donc :

$$(c_1 + c_2)/p = c_1/p + c_2/p - c_1 \cdot c_2/p,$$

ou bien :

$$(33) \quad (c_1 + c_2)/p + c_1 \cdot c_2/p = c_1/p + c_2/p.$$

Si $c_1 \cdot c_2 = 0$, (au cas des propositions ceci signifie que c_1 et c_2 sont incompatibles on aura :

$$(34) \quad (c_1 + c_2)/p = c_1/p + c_2/p.$$

Au cas que p soit un ensemble des prémisses et c_1 et c_2 des propositions, la formule (34) peut être traduite en langage usuel : « si p est vrai, il est possible que, ou bien c_1 soit vrai, ou bien c_2 soit vrai, est équivalent à si p est vrai, il est possible que c_1 soit vrai, ou bien si p est vrai, il est possible que c_2 soit vrai, à la condition que c_1 et c_2 ne soient pas vrais à la fois. »

Si l'on change le signe « probabilité » des formules (33) et (34) par le signe « implication », elles resteront vraies sans

changement. Par exemple une analogie de (34) sera formulée de la manière suivante :

$$(c_1 + c_2)cp := c_1cp + c_2cp.$$

à la condition que c_1 et c_2 ne sont pas vrais à la fois.

Prenons par exemple.

p :

A. Tous les nombres que nous allons considérer sont l'élément de l'ensemble E des $2n$ premiers entiers (1 2 3 4... $2n$).

B. Nous considérons un nombre x de l'ensemble E .

c_1 : x est un nombre pair.

c_2 : x est un nombre impair.

Dans ce cas $(c_1 + c_2)/p$ est équivalent à la somme de c_1/p et c_2/p car un nombre ne peut être à la fois pair et impair. Mais si l'on change c_1 par une autre proposition c' .

c' : x est un nombre impair ou un nombre multiple de 4.

$c_1 + c'_2$: x est un nombre pair ou impair.

L'implication $(c_1 + c'_2)cp$ est aussi la même que l'implication $(c_1 + c_2)cp$ parce que le sens de $(c_1 + c'_2)$ est aussi le même que $(c_1 + c_2)$. Mais l'expression $c_1/p + c'_2/p$ n'est pas tout à fait la même que $c_1/p + c_2/p$, car le nombre multiple de 4 est aussi un nombre pair, les propositions c_1 et c_2 ne sont pas incompatibles. Alors il faut utiliser la formule (33).

Considérons maintenant l'ensemble c_2p . On voit sans peine $c_2p = c_2$, car c_2 est un sous-ensemble de p . Donc on a :

$$c_1/c_2p = a/a + c(a + c')$$

puisque

$$c_2 = c_1c_2 + \dots + c_1c_2.$$

D'autre part,

$$c_1c_2/p = a/N = (a + c)/N \cdot a/(a + c)$$

et on a déjà

$$c_2p = (a + c)/N,$$

donc on a

$$(35) \quad c_1c_2/p = c_2/p \cdot c_1/c_2p.$$

« ' si p est vrai, il est possible que c_1 et c_2 soient vrais à la fois ' est équivalent à ' si p est vrai, il est possible que c_2 soit vrai, et si c_2 et p sont vrais à la fois, il est possible que c_1 soit vrai ' ».

Par analogie avec l'implication il est clair qu'on aura,

$$(36) \quad c_1c_2cp := c_2cp \cdot c_1cc_2p.$$

d) Transitivité des probabilités.

Comme nous avons dit à la formule Df_5 , l'implication est un cas particulier de la probabilité ; il est nécessaire que la probabilité soit aussi transitive.

Démontrons-le par un exemple.

Prémisse p :

Supposons un grand sac comprenant P urnes dont chaque urne comprend R boules. Il y a S boules blanches dans Q de ces P urnes, et toutes les autres boules sont noires.

Prémisses G :

A. Un grand sac comprend P urnes, Q de ces urnes ont un même caractère spécial.

B. U est une urne tirée de ce sac.

Conclusion F/G :

C'est une urne parmi les Q urnes spéciales.

La conclusion F est probable ; sa probabilité est évidente d'après la formule (31) égale à Q/P .

Prémisse F :

A. Une urne comprend R boules, S de ces boules sont blanches, les autres sont noires.

B. Cette boule est tirée de cette urne.

Conclusion E/F :

Cette boule est blanche.

D'après la formule (31) il est clair que $E/F = S/R$.

Prémisses combinées.

A. Prémisse p.

B. Cette boule est tirée d'une urne qui est tirée de ce sac.

Conclusion E :

Cette boule est blanche.

Il est facile de voir que la nouvelle probabilité est $Q/P \cdot S/R$.

Symboliquement, on peut formuler ce fait sous la forme de la transitivité des probabilités :

$$E/G : c : E/F \cdot F/G.$$

Soient E, F, et G trois propositions, donc on a : « s'il est possible que F soit vrai, quand G est vrai, et s'il est possible que E soit vrai, quand F est vrai, il en résulte qu'il est possible que E soit vrai, quand G est vrai. »

Un cas particulier se présente pour $E/F=1$, $F/G=1$, et $E/G=1$, c'est-à-dire pour les implications.

e) Définition symbolique de la probabilité.

Est-ce que le signe c/p est aussi un signe primitif qui ne

peut pas être défini à l'aide des cinq signes fondamentaux que nous avons vus au chapitre III ?

Pour résoudre cette question, reprenons les cinq signes.

Les cinq signes fondamentaux sont tous affirmatifs, représentant la certitude, sauf le seul signe, la somme (+) qui exprime « p ou q » et qui comprend implicitement une probabilité. Donc si le signe c/p est définissable par eux, le signe (+) est un des facteurs importants. De plus, l'implication est un cas particulier de la probabilité comme nous avons dit à la formule Df₅. Donc, la définition de la probabilité comprend aussi ce signe.

Supposons p et c deux propositions données quelconques. Désignons par c' une proposition quelconque inconnue, mais elle n'est ni c ni absurde. Envisageons l'expression

$$(c+c') \cdot c \cdot p$$

Elle exprime d'après la définition de l'implication et la définition de la disjonction, : « si p est vrai, c' est vrai ; ou bien, si ce n'est pas le cas, c' est vrai ». Cette expression exprime clairement : « il est possible que c soit vrai » ; et encore, « il est possible que c ne soit pas vrai, au cas où c' est vrai ». Donc cette expression n'est pas autre chose que la probabilité « si p est vrai il est possible que c soit vrai. »

Df₈ :
$$c+c' \cdot c \cdot p := c/p$$

Au cas que $c'=0$, le signe $c+c'$ deviendra « c », alors,
 $c/p = ccp$.

6. -- Le principe du tiers exclu

Nous allons lancer en l'air une pièce de dix francs, sans autre précaution que de l'avoir agitée entre nos mains. Une fois tombée, nous savons sûrement qu'elle va montrer le côté pile ou bien le côté face. Il y a la possibilité de montrer l'un, il y a la possibilité de montrer l'autre, mais jamais deux côtés à la fois, ni de ne montrer rien. On exprimera ce fait par :

(35)
$$c/p + \neg c/p = 1.$$

Cette formule est évidente ici, parce que l'on peut voir sans peine :

$$c/p = 1/2, \text{ et } \neg c/p = 1/2.$$

Dont c/p est la probabilité de montrer le côté pile.

Si c et p sont deux ensembles finis et qu'ils représentent en même temps leurs nombres cardinaux, d'après (35) on aura :

$$c/p + \neg c/p = 1$$

c'est-à-dire : $c + \neg c = p$.

Ceci est évident parce que l'ensemble p est la somme de l'ensemble c et de son complémentaire $\neg c$.

Cette formule exprime en effet le principe du tiers exclu. D'après la formule (8) du chapitre III, le principe du tiers exclu est

$$(36) \quad V. \quad c + \neg c.$$

Nous allons démontrer que les expressions (35) et (36) sont équivalentes.

Démonstration :

Si $\neg c/p = 0$, d'après (35), on a $c/p = 1$, c'est-à-dire « si $\neg c$ n'est pas vrai, c est vrai. » De même si $c/p = 0$, d'après (35), on a $\neg c/p = 1$, c'est-à-dire « si c n'est pas vrai, $\neg c$ est vrai ». Donc l'expression (35) exprime que « quand p est vrai, ou bien c est vrai si $\neg c$ est faux, ou bien $\neg c$ est vrai, si c est faux. » C'est tout à fait le même sens que l'expression (36).

Exemple.

p :

A. E est un ensemble des $2n$ premiers nombres entiers.

B. r est un nombre quelconque de E .

c : r est un nombre pair.

$\neg c$: r est un nombre impair.

La formule (35) exprime alors le fait que r est un nombre ou bien pair, ou bien impair. Si l'on désigne par P l'ensemble des nombres pairs, donc

le nombre cardinal de $E = 2n$,

le nombre cardinal de $P = n$,

le nombre cardinal de $c(P) = n$.

Alors

$$c/p = n/2n = 1/2,$$

$$\neg c/p = n/2n = 1/2,$$

et

$$c/p + \neg c/p = 1.$$

7. -- Le paradoxe du tiers exclu

Il y a quelquefois des contradictions qui se manifestent entre les faits nouveaux et les propriétés que nous croyions toujours vraies sans aucune modification ou bien qui nous semblaient évidents mais reposaient en réalité sur notre expérience ou notre intuition incomplète. L'appartenance est ordinairement regardée comme un cas particulier de l'inclusion ; c'est une intuition incomplète. C'est pour cette raison qu'il existe beaucoup de faits paradoxaux en logique ; le plus apparent est le paradoxe du tiers exclu.

Par ce paradoxe, nous croyons quelquefois qu'il y a des objets tiers au milieu des ensembles complémentaires. Mais il est facile d'éviter ce paradoxe, si l'on fait toujours attention au domaine de l'ensemble considéré. A ce point de vue, nous préférons utiliser la formule (35) au lieu de la formule ordinaire (36). Car la formule (35) établie à l'aide de la probabilité, nous donne explicitement le domaine de la proposition, c'est-à-dire qu'elle nous donne explicitement la prémisses p .

Examinons maintenant le principe lui-même.

Introduisons comme au chapitre III le symbole $f(x)$ une fonction propositionnelle et convenons de lui donner la valeur 1 si x est un élément satisfaisant, la fonction c'est-à-dire $f(x)$ deviendra une proposition vraie, et la valeur 0, dans le cas contraire. Donc le principe du tiers exclu ordinaire sera formulé sous la forme suivante :

Des deux expressions $f(x)$ et $\neg f(x)$ l'une au moins, est vraie, mais jamais les deux ensemble.

Cette règle de jugement, semblait à quelques logiciens comporter des exceptions. Un exemple pour ce paradoxe souvent employé par eux est ce que nous avons relaté au chapitre II, que « Socrate est égal à un angle droit ». A notre point de vue, c'est certainement une proposition, ni vraie, ni fausse, mais ce cas n'est pas applicable tout de suite au principe du tiers exclu. Parce que nous devons considérer d'abord les propositions de deux classes : absurde et non-absurde. Alors le principe du tiers exclu sera applicable. Pourquoi se présente-t-il un tel paradoxe ? C'est parce que $f(x)$ n'est pas

vrai toujours absolument, il est vrai d'après la vérité des prémisses, ou par rapport à son domaine. Donc, pour éviter le paradoxe du tiers exclu il est préférable d'accepter la formule (35), c'est-à-dire :

Soit p un ensemble des prémisses, des deux expressions $f(x)$ et $\neg f(x)$ l'une au moins est vraie impliquée par p , mais jamais les deux ensembles.

C'est la formule (35), la dernière partie de ce principe exprime que : « il est faux si $c/p=1$ et $\neg c/p=1$ à la fois. « ou bien « il est faux que $2=1$. »

CHAPITRE VI

SUR L'HYPOTHESE

Sous le titre « Sur l'hypothèse », sujet que nous allons examiner au présent chapitre, nous voulons continuer, — ou bien pour préciser le mot, — nous voulons compléter le travail que nous avons fait au chapitre II sur la définition et au chapitre III sur la démonstration. Il nous semble souvent que l'hypothèse permet d'agir seulement à la science expérimentale ou à la science naturelle, comme une explication provisoire qui a pour but de faire comprendre plus facilement les faits que nous allons étudier. Elle est provisoire parce que si une nouvelle explication était découverte, de telle sorte qu'elle soit plus commode et plus précise que l'ancienne, on adopterait cette nouvelle hypothèse et l'on ne considérerait plus l'ancienne. C'est aussi pourquoi nous disons de cette explication qu'elle est une hypothèse. Donc, les hypothèses ne sont pas des vérités ; elles peuvent être considérées comme vraies au sens le plus large possible, provisoirement, ou bien elles peuvent être dites vraies, particulièrement dans un certain cas spécial.

Le mot « hypothèse », pour ainsi dire, est alors toujours employé en science physique, en science chimique et en science naturelle. On entend très rarement en science mathématique ce nom : « hypothèse », parce que l'on considère que la mathématique est la science la plus exacte et la plus précise, telle qu'une vérité probable comme l'hypothèse ne peut se présenter en cette science. Mais cela n'est pas tout à fait correct. En réalité, il y a aussi des hypothèses en mathématiques sous les noms déguisés : les indémontrables et les indéfinissables. Parce que « les indémontrables ne sont pas vérités. Ce sont des hypothèses que nous n'avons pas de raisons de tenir pour vraies, mais que nous avons des mo-

tifs de prendre pour règles. Ils ne sont pas logiquement nécessaires, mais ils nous sont nécessaires. » (XI, 4).

Pour chaque science établie logiquement, il nous semble qu'il est nécessaire de supposer d'abord les hypothèses, dont toute la théorie de cette science est déduite d'après cet ensemble d'hypothèses par les règles permises de la logique. Il est nécessaire, donc, de considérer une hypothèse comme vraie, mais sa vérité est provisoire et relative, car s'il se présente une contradiction, la vérité n'est pas établie non plus.

Pour la mathématique, ce sont des éléments indéfinissables et des propositions indémontrables : les axiomes et les postulats, qui construisent toute la théorie à l'aide des règles logiques.

Donc, les règles logiques sont les éléments communs à toute la science, tandis que les hypothèses peuvent être différemment adoptées selon la nécessité de cette science considérée.

Pour la raison ci-dessus, nous allons nous occuper, sous le titre « l'hypothèse », des indéfinissables et des indémontrables utilisés par la science mathématique et par la logique mathématique en général. Nous pouvons donc regarder ce chapitre comme un travail pour compléter ce que nous avons examiné sur la définition et sur la démonstration, au chapitre II et au chapitre III.

1. -- Les indéfinissables

Il y a deux sortes de définitions que nous avons données à la fin du chapitre II. On peut les résumer sous la forme suivante :

1° La définition par induction est une définition descriptive. Pour définir un ensemble d'objets, nous nous servons de la méthode analytique, en analysant les caractères communs à tous les objets de cet ensemble. C'est aussi une méthode inductive. Par induction, on prend la nature caractéristique de tous les objets de cet ensemble comme la définition de ces objets. Donc cette sorte de définition est descriptive.

Mais il arrive quelquefois qu'une définition descriptive

n'est pas une vraie définition ; elle est en réalité, une description. D'après elle, nous ne pouvons avoir qu'une idée très vague, telle que ce que nous pensons d'après cette définition peut n'être pas tout à fait semblable à ce qu'elle a défini. Dans ce cas, nous devons changer notre définition en trouvant une condition nécessaire et suffisante, de telle sorte qu'un objet soit un élément de l'ensemble défini. Mais il se produit quelquefois le cas d'une définition donnée (en réalité ce n'est pas une définition vraie, mais une description), le sens d'objet défini ne peut pas être tout à fait exactement le même que nous voulons définir, quoique nous l'ayions transformé par des moyens possibles. Donc, cet objet peut être de ceux qui sont impossibles à définir. Tout ce que nous pouvons faire par la méthode inductive en analysant les caractères communs d'objets, ne nous donne qu'une description. Ceci démontre qu'il y a des objets qui ne sont pas définissables.

Aucune définition vraie ne donnera à un aveugle-né l'idée de la lumière, des couleurs ; à un sourd-muet, l'idée du son. Si un aveugle-né nous demande comment est le soleil, nous pouvons en faire toute la description, aussi claire que possible ; mais cependant il ne comprend pas encore ce que veut dire le soleil, parce que nous ne pouvons pas définir la lumière ; l'idée de la lumière est indéfinissable.

Les concepts de cette même catégorie, sont dits : les données immédiates de l'expérience ; ils ne sont pas alors définissables. Ils sont définis immédiatement par notre expérience sans aucun intermédiaire. Nous établissons leur communication avec les intelligences seulement par l'indication. Par exemple, si l'on nous demande ce qu'est la couleur rouge, nous pouvons seulement indiquer que le rouge est la sensation visuelle que nous éprouvons en regardant une fleur de coquelicot. Parce que c'est une sensation visuelle, c'est donc une donnée immédiate par l'expérience. Si l'on n'a pas cette expérience — sensation visuelle, dans ce cas — comme l'aveugle-né, on ne peut pas comprendre la signification de ce concept — rouge — donnée immédiate.

Cette sorte des indéfinissables, qui peut être dite aussi « définie par l'expérience immédiate », est donc connue seulement par notre connaissance empirique.

2° La définition par déduction est une définition dite no-

minale. On donne le nom avant que les objets soient définis. Elle peut être faite au moyen de la classification de PORPHYRE. Les objets définis appartiendront à un sous-ensemble d'un ensemble connu, dont cet ensemble peut aussi être défini comme un sous-ensemble d'un autre ensemble. Ainsi de suite, comme l'opération de la définition de cette façon ne peut pas être infinie, il faut aboutir une fois à un ensemble original qui n'est pas un sous-ensemble d'aucun autre ensemble, c'est-à-dire qu'il est indéfinissable.

D'autre part, comme nous ne pouvons pas faire une infinité de définitions, les choses, les concepts que nous allons considérer pour étudier une science spéciale, mathématique par exemple, forment alors un ensemble fini. Il est bien clair que si nous nous permettons seulement de définir les objets de cet ensemble par les objets parmi cet ensemble (au cas où, si les objets de l'ensemble E sont définis à l'aide des objets de l'ensemble E' qui ne sont pas des mêmes éléments de E , on peut donc considérer l'ensemble somme de l'ensemble E et de l'ensemble E' , c'est-à-dire l'ensemble $[E + E']$, il faut toujours supposer que dans cet ensemble, il y a un sous-ensemble aliquote non-vide, tel que tous les autres objets de l'ensemble original sont définis par eux, et tous les éléments de ce sous-ensemble soient indéfinissables. Autrement dit, définir une notion c'est ramener à l'aide des opérations permettant de la logique à une combinaison des notions connues ; donc, il doit rester toujours quelques notions que l'on ne peut pas réduire à l'aide des autres. Cette combinaison primitive forme alors l'ensemble des indéfinissables.

Pour M. RUSSELL, il n'y a pas d'indéfinissables en mathématique pure : « Thus pure mathematics must contain no indefinables except logical constants », sauf ce qu'il a appelé les « constants logiques » (XX. 10). Mais, ce n'est qu'un changement de terminologie, parce que M. RUSSELL ne veut pas que les termes non-logiques se présentent à la mathématique pour qu'il puisse transformer toute la mathématique en logique et qu'il en résulte que toute la mathématique est une déduction par les principes logiques des principes logiques : « All mathematics is deduction by logical principles from logical principles ». Et par conséquent il ne veut pas naturellement que les indéfinissables se présentent en mathématiques.

Il serait utile, pour une théorie complète de la pensée humaine, de dresser quelques propriétés pour la préciser. Cet ensemble des indéfinissables doit donc être remarqué par les points suivants :

I. — « Une notion n'est indéfinissable que par rapport à un certain système de définitions » (COUTURAT). Etant donnés les éléments d'un ensemble des notions, on peut choisir un sous-ensemble comme l'ensemble des indéfinissables, tel que les éléments de son complémentaire peuvent être tous définis par eux. On peut choisir également un autre sous-ensemble comme l'ensemble des indéfinissables dont tous les autres éléments de cet ensemble sont définis par eux. C'est-à-dire que si cet ensemble est ordonné, les premiers n éléments peuvent être regardés comme les indéfinissables, tels que les autres éléments après le n -ième soient définis par les n premiers ; on pourrait également définir les mêmes notions de cet ensemble ordonné à l'aide des premiers n éléments avec un ordre différent. De plus, le nombre cardinal de ce sous-ensemble des indéfinissables augmentera d'après une adjonction des éléments nouveaux à l'ensemble original. C'est-à-dire que si notre domaine de recherches devient de plus en plus développé, du domaine arithmétique au domaine d'algèbre, du domaine d'algèbre au domaine de la mathématique supérieure, par exemple, le nombre des indéfinissables a la possibilité d'augmenter mais, jamais, de diminuer.

II. — Quoique le nombre cardinal de ce sous-ensemble des indéfinissables augmente, il ne peut pas être très grand, il est au contraire limité et il doit être le plus petit possible. Les indéfinissables doivent être en nombre le plus petit possible, parce que les indéfinissables peuvent avoir des sens différents pour des observateurs différents. Pour M. RUSSELL le nombre des constants logiques indéfinissables est de huit ou neuf. Ce sont l'implication, la notion de la relation, la notion de « tel que », etc.

III. — Soit $E(a_0 a_1 a_2... a_n)$ un ensemble des notions ou des concepts qui seront définis. Il y a alors, selon la considération précédente, un sous-ensemble de E , $E'(a'_0 a'_1 a'_2... a'_m)$ dont les éléments sont tous indéfinissables par rapport à E ; c'est-à-dire que les éléments de E' sont choisis comme la base de la définition pour définir les autres éléments de E . Ce nombre

cardinal m de l'ensemble E' doit alors satisfaire aux trois conditions suivantes :

1. unique ;
2. $m < n$;
3. $m \neq 0$.

Il est unique, parce que, autrement, il n'est pas le plus petit nombre possible, il est plus petit que n parce que E ne peut pas être l'ensemble des indéfinissables, et il n'est pas égal à zéro parce qu'il y a toujours des éléments indéfinissables.

Prenons, par exemple, l'ensemble des cinq notions que nous avons définies au chapitre III : négation, conjonction, disjonction, implication et compatibilité. D'après ce que nous avons démontré au chapitre III, il est clair que $n=5$, $m=2$, $E'=E''$ (négation, conjonction). Ce même ensemble de cinq notions peut être défini à l'aide des deux autres signes comme les indéfinissables parmi eux, par exemple, les indéfinissables choisis par M. RUSSELL et WHITEHEAD sont E'' (négation, disjonction). Les éléments de E' et E'' sont différents, mais leur nombre d'éléments est le même.

Pour apprendre une langue étrangère par la méthode directe, il faut d'abord que l'on ait déjà un vocabulaire suffisant ; autrement, si l'on ne comprend rien, il est impossible de s'expliquer avec cette même langue. Ce vocabulaire nécessaire forme alors l'ensemble des indéfinissables par rapport à cette langue étrangère. Pour préciser cette question, on considère que si quelqu'un a déjà trouvé un ensemble de mots français en nombre le plus petit possible tel que si l'on avait compris le sens de tous les mots de cet ensemble, on peut alors comprendre tout le vocabulaire français qui est tout expliqué à l'aide seulement de ces mots connus. Un tel dictionnaire serait le plus commode et le plus facile pour un étranger qui veut étudier la langue française.

Une question, la plus importante relative aux indéfinissables, est la question suivante :

Comment des notions indéfinissables peuvent-elles exister dans l'esprit ?

Par la perception des représentations d'un objet, grâce à la manière dont il nous apparaît, nous savons qu'il existe quelque chose, un objet ou un concept. C'est tout à fait de même que l'idée de l'existence empirique peut se présenter.

Nous avons donc une connaissance qui est la représentation d'un objet, et qui est la manière dont cet objet nous apparaît. C'est donc l'impression de cet objet par sa représentation qui nous fournit un concept fixe. S'il se présente une autre fois un objet du même genre que celui que nous avons prévu, cet objet nous fournit un concept tout à fait semblable par sa représentation que celui qui nous a été fourni la première fois. Ce concept qui ne peut s'exprimer par l'impression et qui ne peut nous être fourni par expérience immédiate, devient donc une notion indéfinissable. Donc, la représentation d'objet que nous considérons est la seule communication de ce concept indéfinissable et de notre intelligence.

C'est par la représentation différente d'un papier blanc et d'un papier rouge, que nous connaissons les notions : rouge et blanc. Que cette représentation n'existe plus, les notions « blanc » et « rouge » ne peuvent plus être connues.

M. GOBLOT a donné un terme spécial, « résidu d'abstraction », pour expliquer la question ci-dessus. Nous l'introduisons ici comme une conclusion de cette question. Selon M. GOBLOT les indéfinissables sont « saisies par l'esprit à titre de résidus d'abstraction ». Ainsi, « nous définissons les figures géométriques au moyen de relations spatiales élémentaires ; ces relations elles-mêmes se définissent, ce'st-à-dire se construisent. L'espace est ce qui reste quand on fait abstraction de toute détermination de relation spatiale ou de figure ».

2. -- Les indémontrables

Démontrer une proposition, c'est établir sa vérité à l'aide des seules opérations de la logique sur les propositions ou bien les prémisses qui sont données d'avance. Donc, il y a nécessairement des indémontrables comme il y a des indéfinissables. Par le mot : démontrer, on entend expliquer la vérité d'une proposition. Par le mot : indémontrable, on entend alors que la vérité d'une proposition ne peut pas être démontrée. Autrement dit, on croit qu'elle est vraie mais on ne peut pas le démontrer.

Nous examinerons la démonstration adoptée en général par la géométrie euclidienne.

La règle qui est souvent utilisée en géométrie élémentaire, est sans doute le syllogisme. Par exemple, supposons un cercle O sur la circonférence duquel nous marquons deux points A et B . Avec ces deux points A et B et le centre O , nous construisons un triangle OAB . Nous disons que ce triangle a deux angles égaux.

Il est facile de le vérifier par deux syllogismes successifs de la forme suivante :

SYLLOGISME c_1cp_1 .

p_1 : Tout rayon d'un même cercle a même longueur.

OA et OB sont deux rayons du même cercle O .

c_1 : OA et OB ont même longueur.

DÉFINITION : Un triangle est dit isocèle s'il a deux côtés égaux.

SYLLOGISME c_2cp_2 .

p_2 : Tout triangle isocèle a deux angles égaux. Ce triangle OAB est isocèle.

c_2 : Ce triangle OAB a deux angles égaux.

Ce sont deux syllogismes catégoriques de la première catégorie comme nous l'avons formulé au chapitre III. Logiquement, on peut dire ici que c_1 et c_2 sont tous vrais, c'est-à-dire que la proposition : le triangle OAB a deux angles égaux, est vraie ; parce que la forme de ces syllogismes est parfaitement correcte. Mais mathématiquement, la vérité de c_1 et c_2 dépend de celle des prémisses p_1 et p_2 ; mais ceci n'est pas la responsabilité de ce syllogisme, c'est-à-dire de la logique. Elle dépend alors de ceci : ou bien s'il y a le théorème mathématique qui peut la confirmer, ou bien si les p sont elles-mêmes des propositions indémontrables permises à cette branche spéciale de la mathématique. Autrement dit, l'établissement des prémisses dans le syllogisme n'est pas la responsabilité des logiciens ; les logiciens étudient seulement la question : si p est vrai, est-ce que c est vrai, et dans quelle condition c peut-il être vrai ?

UN SYLLOGISME :

p : Homme est mortel,

Socrate est homme,

c : Socrate est mortel.

est logiquement toujours vrai, parce que la forme de ce syllogisme est parfaitement correcte. Mais scientifiquement la vérité de c dépend aussi de la condition si homme est vrai-

ment mortel ou non. La vérité de la majeure de ce syllogisme est d'une source différente de celle que nous venons de citer plus haut pour le triangle isocèle. Parce que « homme est mortel » peut être dit vrai d'après l'induction logique, tandis que la proposition mathématique ci-dessus est établie sur les indémontrables. Les démonstrables ne sont pas des vérités proprement dites comme celles dont nous venons de parler. Au contraire la proposition démontrée par l'induction, par exemple, la proposition : homme est mortel, est probablement vraie. On dit ici probablement vraie, parce que l'induction ordinaire n'est pas complète. Avant que nous trouvions le cas d'un homme qui n'est jamais mort, nous pouvons toujours affirmer par l'induction la vérité : homme est mortel. Donc ceci n'est pas un indémontrable. C'est-à-dire que « Socrate est mortel » ne dépend pas des indémontrables. Cette propriété peut être regardée comme une des différentes caractéristiques entre la science mathématique et la science expérimentale ou la science naturelle.

Comme nous avons raisonné pour les indéfinissables, les propositions vraies ne peuvent pas être infinies, alors il est inévitable qu'il reste toujours des indémontrables, dont toutes les autres propositions établissent leur vérité sur eux.

Donc, les indémontrables ne sont ni vrais, ni faux, mais il est nécessaire pour nous de les considérer comme vrais, autrement toute la mathématique ne serait pas vraie également.

On peut choisir des indémontrables. Comme l'exemple que nous avons donné plus haut, la géométrie euclidienne, la géométrie de LOBATCHEVSKY et la géométrie reimanienne ont leurs indémontrables différents. Mais on doit être convaincu d'une chose : c'est que si l'on veut étudier cette géométrie, cette théorie, il est nécessaire de regarder ses indémontrables comme vrais, même s'ils ne sont en réalité, ni vrais, ni faux. Par ce caractère, POINCARÉ a déclaré : « Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre, elle peut seulement être plus commode ». En effet, il n'y a pas une question de la vérité parmi les indémontrables.

Une fois que des indémontrables sont choisis, les points suivants doivent être remarqués :

1) Le nombre des indémontrables doit être le plus petit possible.

2) Toutes les autres propositions dans cette science considérée doivent être établies sur eux, et seulement établies sur eux.

3) Il n'y a aucun indémontrable de cet ensemble qui n'est jamais utilisé.

4) Il n'y a aucune contradiction entre eux. C'est-à-dire que l'on ne doit jamais déduire de cet ensemble une proposition ($\neg p$) d'où p est aussi un élément de notre ensemble.

Les points ci-dessus sont tous essentiels logiquement. A chaque branche de la mathématique, ou plus, en général, de la science, il y a des indémontrables. On s'efforce de les réduire au minimum, de ne pas déduire les contradictions, et, enfin, s'il y a un indémontrable qui n'est jamais utilisé, on peut le supprimer.

Pour M. RUSSELL, il y a dix indémontrables dans la logique mathématique. Ils sont (XX. 11) :

(1) Si p implique q , p implique q .

(2) Si p implique q , p implique p .

(3) Si p implique q , q implique q .

C'est en réalité l'expression de la non-absurdité des propositions p et q .

(4) Une hypothèse vraie dans une implication peut être assimilée et la conséquence sera affirmée.

C'est en réalité le syllogisme hypothétique de la seconde catégorie que nous avons formulé par la formule 17 au chapitre III.

(5) Si p implique q et q implique r , alors p implique r .

C'est la transitivité des implications. Elle est aussi le syllogisme catégorique.

(6) Principe de simplification.

Si p implique q , alors pq implique p , si q implique q .

C'est une analogie de la formule $E \cdot F \supset E$ d'où E et F sont deux ensembles quelconques. Cette formule de la théorie des ensembles d'après notre analogie est aussi indémontrable, elle doit être évidente par elle-même.

(7) Principe de l'importation.

Si q implique q et r implique r , et p implique que q implique r , alors p implique r .

(8) Principe de l'exportation.

Si p implique p , et q implique p , alors si pq implique r , p implique que q implique r .

Les principes 7 et 8 sont opposés, ils ont des fonctions inverses.

(9) Principe de la composition.

Si p implique q et p implique r , alors p implique qr .

D'après la définition de l'ensemble il est évident aussi que si FcE et GcE , alors $FGcE$. Cette relation est aussi indémontrable.

(10) Principe de la réduction.

Si p implique p et q implique q , alors que p implique q implique p , implique p .

3. -- L'axiome et le postulat

En mathématique, « la logique et l'intuition ont chacune leur rôle nécessaire. Toutes deux sont indispensables. La logique qui peut seule donner la certitude est l'instrument de la démonstration : l'intuition est l'instrument de l'invention » (XV. 6). La logique est l'instrument de la démonstration mais elle n'est qu'une partie de la démonstration. L'intuition est l'instrument de l'invention mais aussi, elle n'est qu'une des essences de l'invention. D'après ce que nous avons considéré sur la démonstration, il est bien clair que l'essence de la démonstration est les principes affirmés d'avance et les règles permises de la logique.

Par intuition, nous entendons, en général, toute la connaissance directe immédiate d'un objet dont la pensée est actuellement présente à l'esprit. L'intuition nous fait saisir l'objet connu tout d'un coup et dans son ensemble ; elle nous fournit donc ce que l'on appelle : les « données immédiates ».

Malgré que les modes de connaissance par l'intuition soient empiriques, soient rationnels, soient inventifs, ou bien soient métaphysiques, le jugement inventé par l'intuition ne peut pas être purement intuitif. Il peut être également logique mais il peut n'être pas complètement logique. En disant ici logique, cela signifie que ce jugement doit être raisonné logiquement à partir de tels principes que l'inventeur a connus ordinairement d'une façon bien claire.

Les mots : donnée immédiate, sont une expression assez mystérieuse.

Si l'on dit que par l'intuition il est évident que toute fonction continue a une dérivée, puisque toute courbe a une tangente, malgré que cette proposition soit fausse, est-ce qu'on peut dire qu'elle est une proposition « donnée immédiate » ? Certainement, en observant qu'une courbe a une tangente à chaque point situé à cette courbe, on peut dire immédiatement qu'une fonction continue qui est correspondante à cette courbe, a une dérivée pour chaque valeur de la variable ; cependant, si une personne n'a aucune connaissance sur la mathématique supérieure, ou bien qui n'a pas une instruction mathématique suffisante, on ne croit pas qu'elle puisse avoir une telle intuition. Donc pour avoir une intuition mathématique on doit avoir d'abord une instruction mathématique bien comprise telle que si l'on pense une question, on peut facilement la raisonner. L'intuition est donc implicitement logique. Si nous ne voulons pas que ce terme « logique » s'applique à ce mot « intuition », nous pouvons le changer par le mot « raisonnable ». Mais parce que l'étape de ce raisonnement logique est trop courte et presque négligeable, l'inventeur lui-même ne peut pas savoir comment il a raisonné ; on dit alors qu'il est donnée immédiate.

Les principes indémontrables de la mathématique sont en général classifiés par les logiciens et les mathématiciens eux-mêmes, en deux sortes : les axiomes et les postulats.

Les axiomes sont caractérisés par leur universalité, c'est-à-dire qu'ils sont la base de toutes les branches de la mathématique, tandis que les postulats se confinent dans chaque étude spéciale de la mathématique.

Un axiome, par exemple : « deux quantités égales à une même troisième quantité sont égales entre elles », peut être immédiatement regardé comme vrai pour toute la quantité, même dans tout le domaine de la science. On affirme cet axiome intuitivement sans aucune hésitation. C'est un principe indémontrable ; on ne peut pas le démontrer.

Les axiomes en mathématiques ont alors les propriétés suivantes :

1. Ils sont indémontrables ;
2. Ils sont évidents par eux-mêmes.

Comment un axiome est-il évident par lui-même ? Quand nous disons « lui-même », ce que nous pensons ne peut être autre chose que la définition. Donc, c'est la définition qui

peut fournir la vérité. Par exemple, nous avons défini au chapitre III que deux ensembles sont dits égaux en puissance si l'on peut épuiser leurs éléments en même temps. D'après cette définition d'égalité de la puissance, il est évident que si deux ensembles A et B peuvent être épuisés en même temps, et que l'ensemble A et un autre ensemble C peuvent être épuisés en même temps, les trois ensembles A, B et C peuvent donc être épuisés en même temps. C'est une des interprétations de l'axiome ci-dessus.

Les axiomes sont presque comme des règles de la logique qui s'appliquent indifféremment à toute espèce de science. L'axiome ci-dessus sur l'égalité des quantités peut être vérifié partout, par les nombres, les ensembles, en mathématique; par les capacités, les forces, en physique; et par les utilisations ordinaires.

Une autre espèce d'indémontrables en mathématiques est les postulats.

Les postulats sont donnés différemment aux différentes branches des mathématiques.

Considérons, par exemple, le postulat proposé par EUCLIDE : le Postulatum d'EUCLIDE.

Par un point on ne peut faire passer qu'une parallèle à une droite donnée.

Ce postulat a été une fois considéré comme un théorème démontrable, mais qu'on a longtemps cherché en vain à démontrer. On a essayé de le démontrer parce qu'il n'est pas universel; on n'a donc pas cru qu'il était indémontrable. Les postulats ne sont pas alors tout à fait les mêmes que les axiomes.

1° Ils sont comme les axiomes indémontrables : les mathématiciens demandent qu'on les lui accorde. Si l'on n'accorde pas, on peut construire les autres postulats et établir une autre théorie. C'est la raison pour laquelle les géométries non-euclidiennes sont établies.

2° Ils sont comme les indéfinissables : spéciaux à chaque branche de la mathématique. Et donc les différents postulats caractérisent les différentes études.

Les postulats sont tout à fait analogues aux hypothèses proposées pour les sciences expérimentales. Tandis que les axiomes sont les principes communs à toute la science.

Les postulats ou les hypothèses ne peuvent pas être dits

vrais ou faux, mais « ils peuvent être seulement plus commodes ».

4. -- Comment les indémontrables sont-ils possibles ?

Nous devons regarder les indémontrables comme vrais pour que nous puissions établir la vérité de notre étude. Mais, comment sont-ils possibles et comment l'hypothèse naît-elle ? C'est une question assez délicate.

On peut distinguer à ce sujet quatre opinions différentes :

1° La première façon de voir peut être appelée l'opinion logique. C'est celle de ceux qui croient que toutes les propositions mathématiques sont fondées sur les hypothèses qui sont choisies arbitrairement par nous. Les théorèmes établis dépendent alors de cet ensemble des hypothèses. Parce que les hypothèses sont arbitrairement choisies, il ne s'agit pas de la vérité comme d'une question importante dans ce cas. Il peut y avoir une infinité de façons de supposer cet ensemble d'hypothèses comme la base de la construction de la science. Tous les résultats obtenus par le choix arbitraire des hypothèses sont vrais à la fois, même s'ils sont contradictoires entre eux ; par exemple, la géométrie euclidienne et la géométrie riemanienne sont vraies à la fois, et la géométrie de LOBATCHEVSKY est vraie aussi, malgré qu'elles soient contradictoires entre elles. Donc, l'établissement des indémontrables est arbitraire ; les indémontrables sont vrais une fois choisis. Ce sont les thèmes de PEANO et de HILBERT (XIX. 2).

2° La deuxième théorie considère que les axiomes sont des jugements empiriques. C'est l'expérience qui fournit les axiomes. Les indémontrables reposent sur les expériences. La base de toute la science est ainsi expérimentale. C'est parce que l'on utilise la géométrie pour mesurer les champs, c'est parce que l'on a établi par l'expérience des faits extérieurs les axiomes et les postulats. Il en résulte donc la géométrie, la mécanique qui sont applicables à l'expérience. Mais ceci montre évidemment que la géométrie non-euclidienne est fausse.

3° La troisième thèse est la théorie de KANT. Pour KANT, c'est une vérité *a priori* et apodictique que, par exemple,

entre deux points, il n'y a qu'une droite ou que l'espace a trois dimensions. Donc les kantienens enseignent que les indémontrables sont des jugements synthétiques *a priori*.

D'après l'opinion de H. POINCARÉ, ces opinions sont toutes incomplètes. Autrement dit, les axiomes ne sont, ni des jugements arbitrairement choisis, ni des jugements empiriques, et ni des jugements synthétiques *a priori*; ils ne sont pas des jugements *a priori*, parce que : « Ils s'imposeraient alors à nous avec une telle force, que nous ne pourrions concevoir la proposition contraire, ni bâtir sur elle un édifice théorique. Il n'y aurait pas de géométrie non euclidienne » (XV. 7).

Pour lui, ce sont des conventions.

4° La théorie de la convention de POINCARÉ.

Pour POINCARÉ, les axiomes sont des conventions : « Ce sont des conventions ; notre choix parmi toutes les conventions possibles, est guidé par des faits expérimentaux ; mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester rigoureusement vrais quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives. »

« En d'autres termes, les axiomes de la géométrie (je ne parle pas de ceux de l'arithmétique) ne sont que des définitions déguisées » (XV. 8).

Pour expliquer ce qui a donné le sens du mot : « convention », nous introduisons l'étude de M. L. ROUGIER qui l'a expliqué de la façon suivante : « Une convention est une énonciation qui exprime l'accord librement intervenu entre plusieurs personnes (et plus improprement, entre un individu et lui-même) au sujet d'un objet spéculatif ou pratique. Au point de vue psychologique, une convention diffère d'une proposition en ce qu'elle n'est pas un jugement qui s'impose à l'assentiment de notre entendement pour des motifs rationnels propres à déterminer une certitude apodictique ou assertorique ; mais en ce qu'elle est un décret, issu d'une libre décision de notre esprit, qui se propose à l'acquiescement de notre volonté, toujours maîtresse de l'accepter ou de la rejeter. Au point de vue logique, une convention diffère d'une proposition en ce qu'elle est une énonciation qui n'est pas susceptible d'être vraie ou fausse, mais dont on peut seulement dire qu'elle est plus ou moins indispensable et commode » (XXIV).

5. -- La théorie de la raison manquante

Les indémontrables ne sont ni vrais, ni faux ; mais il faut les regarder comme vrais. Une question sera donc posée : pourquoi l'on peut les regarder comme vrais ?

Il a été considéré par le déterminisme que l'ordre de la nature est constant ; la loi de la nature ne donne pas d'exception (en effet, si elle rencontre une exception, on la supprime) et l'ordre de la nature est universel. Si, au contraire, il n'y a pas une loi de la nature, toute notre induction ne serait pas possible, c'est-à-dire que l'induction repose sur la confiance que nous avons dans le déterminisme.

Au dernier chapitre, nous avons introduit le principe de la causalité qui peut aussi être écrit sous la forme de deux parties correspondant au principe du déterminisme ci-dessus. La première partie, l'énoncé : « il n'y a pas de faits sans cause », est, en effet, un principe positif qui n'est pas autre chose que la raison suffisante de LEIBNIZ donnée au chapitre VI. Le second énoncé du principe de la causalité : « les mêmes causes produisent les mêmes effets », a été considéré par M. GOBLOT comme un corollaire du premier ; mais il est en effet, à notre avis, un principe négatif important et indépendant de celui-ci.

Ces principes de la causalité sont des indémontrables et des postulats. Particulièrement, nous allons regarder le deuxième principe, un principe indémontrable le plus fondamental.

La deuxième partie du principe de la causalité est négative et, en effet, équivalente au principe de la raison manquante qui a déjà une fois été introduit au chapitre précédent.

« Les indémontrables ne sont pas vérités. » Ils ne peuvent pas être vrais ou faux. Mais nous devons être convaincus d'une chose, c'est qu'ils doivent être regardés comme vrais. Prenons une suite d'implication :

$$c_1cp_1, c_2cp_2, c_3cp_3, \dots$$

Si l'on désigne par p le produit de toutes les prémisses $p_1, p_2, \dots$, c'est-à-dire si l'on pose :

$$p = p_1 \cdot p_2 \dots$$

on aura donc :

$c_1cp, c_2cp, \dots cncp.$

Ceci signifie que la vérité de l'ensemble de propositions ($c_1, c_2, \dots cn$) est fondée sur la vérité de p . Si l'on dit p n'est ni vrai, ni faux, alors toute la science établie par cet ensemble des propositions n'existe pas. Donc, on dit que si p est indémontrable, il n'est ni vrai, ni faux, mais qu'on doit le regarder comme vrai. C'est une nécessité d'établir une science.

On ne démontre pas le postulat d'EUCLIDE, il n'est ni vrai, ni faux ; mais quand on veut étudier la géométrie élémentaire, on doit affirmer que ce postulat est vrai, absolument. Une question est intéressante maintenant, c'est pour quelle raison on a le droit de dire que l'on peut regarder le postulat d'EUCLIDE comme vrai ? C'est là, certainement, une question délicate. Parce que cette question ne diffère pas de celle-ci : trouver une base pour établir les indémontrables et les regarder comme vrais. Cette base ne peut pas être démontrée, car autrement tous les indémontrables seraient démontrés. Il est donc, pour mieux dire, *a priori* ; car on ne peut pas convaincre une autre proposition tout à fait opposée à celle-ci.

Ainsi considérée, la vérité des indémontrables est fondée sur un principe. Ce n'est pas autre chose que le principe négatif, dit le principe de la raison manquante.

Dix hommes sont tous soupçonnés de la même condition d'être des malfaiteurs ; parce que l'on ne trouve pas une raison pour que l'un d'eux soit le plus possible un malfaiteur, on peut raisonner qu'ils ont la même probabilité d'être malfaiteurs. C'est la raison manquante qui nous fournit la possibilité de supposer ainsi, comme nous l'avons expliqué au chapitre précédent. Pourquoi « les mêmes causes produisent les mêmes effets » ? C'est parce qu'« il n'y a pas de raison pour que les causes étant les mêmes, les effets soient différents » (M. GOBLOT). C'est donc par le principe négatif, la raison manquante, que l'on établit ce principe indémontrable, le deuxième principe de la causalité. Deux oranges se présentent à nous ; nous pouvons savoir au premier coup d'œil qu'elles sont toutes deux des oranges de la même sorte. Le temps ne nous permet pas d'analyser si les deux objets sont tout à fait semblables et nous disons donc qu'ils sont de la

même sorte. C'est seulement parce que, dans une minute, nous ne pouvons pas trouver la distinction de ces deux objets, et nous disons qu'ils sont deux oranges de la même sorte. C'est la raison manquante qui nous permet de dire cela.

De même pour le postulat d'EUCLIDE ; on peut regarder le postulat d'EUCLIDE comme vrai, parce qu'il n'est pas faux : il nous manque une raison pour dire que le postulat d'EUCLIDE est faux. Donc, on peut établir la vérité des autres propositions de la géométrie euclidienne et les regarder comme vraies.

C'est pour cette même raison que la géométrie riemannienne et la géométrie de LOBATCHEVSKY ont été construites. Avant que RIEMANN ou LOBATCHEVSKY ait construit son axiome de la parallèle, il a essayé de démontrer l'axiome d'EUCLIDE, comme il ne peut pas trouver une raison pour prouver que cette proposition d'EUCLIDE est vraie ; d'après la raison manquante, il peut le supprimer et lui en substituer un autre.

Ainsi, on peut dire qu'à cause de ce seul principe de la raison manquante les indémontrables de la mathématique peuvent être regardés comme vrais et doivent être regardés comme vrais, et à cause de ce seul principe de la raison manquante, le principe de la causalité peut être établi.

CHAPITRE VII

CONCLUSION

1. -- Les étapes de la philosophie mathématique

A chaque étape du progrès des mathématiques, il y a une théorie nouvelle correspondante à la philosophie mathématique. Nous prouverons, par exemple, l'ouvrage capital de M. BRUNSCHVICG : Les étapes de la philosophie mathématique, et nous l'examinerons selon la marche de l'auteur.

Le premier livre traite des « Périodes de Constitution ». Il commence par le pythagorisme : « L'histoire de la philosophie mathématique s'ouvre avec le pythagorisme qui est l'une de ses doctrines les plus éclatantes mais aussi l'une des plus mal connues de l'antiquité » (p. 3). C'est parce que les pythagoriciens se sont intéressés seulement et spécialement à la théorie des nombres, qu'ils n'ont établi que l'arithmétisme. Ils ont donc construit une philosophie mathématique de « nombre », comme nous avons considéré au chapitre premier que les pythagoriciens considèrent que le nombre est le seul principe de toute universalité. Cette idée de pythagoriciens reste encore chez les platoniciens. « Le platonisme est, comme le pythagorisme, une philosophie de type mathématique ». Il est aussi une philosophie mathématique du nombre mais il est un peu différent du pythagorisme, car, « suivant les pythagoriciens, les choses imitent les nombres ; suivant PLATON, les choses participent aux nombres ; le nom seul serait changé » (p. 43). « Lorsque les pythagoriciens disent que les choses limitent les nombres, ils mettent sur le même plan la réalité numérique et la réalité naturelle ; ils constatent une ressemblance entre l'ensemble du nombre et l'ensemble de la chose. Au contraire, suivant PLATON, la science des nombres porte, non pas sur les choses prises en

soi, mais sur les caractères des choses qu'elle réussit à comprendre dans ses déterminations » (p. 44).

Cette étape première, comme on le voit sans peine, est caractérisée par l'introduction de l'idée du nombre. Mais on le doit encore à PLATON qui a, de plus, posé une base fondamentale pour la philosophie mathématique parce qu'il « tire de la mathématique une philosophie et il fonde la mathématique sur une philosophie » (p. 69). Le double caractère de cette philosophie mathématique de PLATON termine la première période de la pensée mathématique.

On peut dire que la deuxième étape de la philosophie mathématique est la naissance de la géométrie euclidienne ou bien, si nous voulons, suivant le terme utilisé par M. BRUNSCHVIG, c'est la naissance de la logique formelle. En effet la géométrie euclidienne n'est pas autre chose que l'application de cette logique formelle qui a été inventée au commencement de cette période, car la partie principale de cette logique formelle est le syllogisme qui est presque le seul moyen utilisé pour la démonstration en géométrie euclidienne. A cette période une autre moisson est aussi très importante : ce sont les indémontrables, les axiomes et les postulats trouvés dans les éléments d'EUCLIDE. Les indémontrables, comme on a déjà vu, restent toujours importants, à la fois, pour les philosophes et les mathématiciens, c'est-à-dire qu'ils sont une question importante en philosophie mathématique.

A partir du dix-septième siècle jusqu'à la naissance du calcul infinitésimal, la philosophie mathématique a toujours été occupée par la philosophie cartésienne. C'est le chapitre VII et le chapitre VIII de cet ouvrage qui en ont traité.

Parce que, à ce moment, la méthode analytique est tout à fait nouvelle à tout le domaine d'étude. Presque tous les scientifiques et tous les philosophes de cette période ont pensé à l'utiliser en vue de développer leur travail. Ceci a donc produit la philosophie cartésienne. « La philosophie mathématique de DESCARTES, si nous l'avons bien interprétée, est une philosophie de géomètre, mais qui, partant de la théorie, s'avance dans deux directions différentes. Etendre la géométrie proprement dite aux problèmes de la cosmologie, et réduire les problèmes de la géométrie à l'algèbre... » (p. 124). Les autres philosophes ont aussi été influencés par cette nouvelle théorie ; comme par exemple : « Selon MALE-

BRANCHE, l'Arithmétique et l'Algèbre sont ensemble la véritable logique qui sert à découvrir la vérité » (p. 130). C'est parce que le sens de l'Algèbre a été étendu au domaine de la géométrie que l'on ne trouve pas encore l'arithmétisme à ce moment. Donc, cette période est « la période de l'Algèbre » ou bien, la période de la méthode analytique.

La quatrième étape du progrès de la mathématique termine la première partie de cet ouvrage. C'est l'invention de l'analyse infinitésimale. C'est la philosophie mathématique leibnizienne. Nous avons dit au chapitre premier que nous ne pouvons pas dire que c'est précisément LEIBNIZ ou NEWTON qui a inventé l'analyse infinitésimale sans aucune influence des autres. Ceci est certainement vrai d'après aussi l'idée de M. BRUNSCHVIG. Parce qu'avant LEIBNIZ, ARCHIMÈDE a considéré sur la quadrature de la parabole, et CAVALIERI et PASCAL ont considéré aussi sur la notion de l'intégrale définie (p. 162).

L'influence de l'infiniment petit n'a pas seulement lieu en mathématique, mais encore elle permet à LEIBNIZ d'établir une nouvelle philosophie mathématique, comme une étape éclatante comparable à celle du pythagorisme et du cartésianisme : « Après le pythagorisme fondé sur la notion du nombre, et le platonisme, lié à la découverte des irrationnelles, après le malebranchisme et le spinozisme, qui sont deux interprétations différentes de la géométrie cartésienne, le leibnizianisme, procédant de l'analyse infinitésimale, paraît devoir marquer une étape nouvelle de la philosophie mathématique » (p. 188). On voit sans peine que la monodologie leibnizienne est un des résultats de sa pensée, l'idée de l'infiniment petit.

Le deuxième partie de cet ouvrage : la période moderne, peut se diviser en deux étapes.

La première étape est la philosophie critique kantienne et le positivisme ; c'est une conséquence de toutes les recherches de la période dernière, autrement dit c'est la conclusion de la période dernière.

La deuxième étape du temps moderne est la logistique, une théorie qui consiste à confondre la logique et la mathématique. C'est le résultat du développement de la théorie récente des ensembles. Inversement on peut dire aussi : « La théorie des ensembles, dans sa partie la plus générale, se

confond avec la logique des classes ; et dans ses autres parties, elle dépend entièrement de la logique des relations » (d'après COUTURAT).

En résumé, il est clair que, à chaque invention d'une théorie de la mathématique, il en résulte une nouvelle philosophie.

Cette philosophie mathématique peut s'intéresser un moment vivement, mais provisoirement, à tout le domaine mathématique et le domaine philosophique ; mais si une théorie plus nouvelle se présente, l'ancienne va être déplacée.

Donc, la naissance de la théorie de M. RUSSELL et de COUTURAT est toute naturelle, à cause de la découverte de la théorie des ensembles, de même que nous avons la théorie cartésienne et la théorie leibnizienne, conséquence respective de la méthode analytique et du calcul infinitésimal.

2. -- La mathématique et la logique

Il y a toujours parmi les classifications ou parmi les principes, deux considérations opposées, l'une positive et l'autre négative. Nous avons la classe positive A, en même temps qu'une classe négative B — le complémentaire de A. Nous avons la démonstration positive — le théorème fondamental de l'implication ; nous avons aussi la démonstration négative — le principe de la contradiction. Nous avons l'existence réalisable, en même temps nous avons l'existence non-effective.

On peut caractériser la nature de la condition nécessaire comme une nature négative : si un objet n'a pas ce caractère, il ne peut pas être un élément de la classe définie par ce caractère. Au contraire, la nature de la condition suffisante est positive, car c'est elle qui permet à l'objet d'appartenir à certaine classe.

Pour la distinction de la logique et la mathématique, nous l'avons déjà mentionné aux chapitres précédents. Au point de vue de l'histoire, le nombre, l'algèbre et l'infiniment petit, ont été chacun considérés comme le fondement de la mathématique, mais d'après un nouveau progrès des mathématiques, on tente de considérer avec cette nouvelle théorie au lieu de l'ancienne. Pour la théorie des ensembles, nous considérons de la même façon. La logique de la classe et la

logique de la relation ne sont pas autre chose que la logique fondée sur la théorie des ensembles. On peut dire que les logisticiens ont établi une philosophie mathématique sur la théorie des ensembles, mais ceci ne peut pas démontrer que la logique est la mathématique. Deux points doivent être convaincus :

1. La théorie des ensembles est une partie de la théorie des mathématiques. Elle a été considérée comme le fondement de la mathématique ; mais elle doit être comme la méthode analytique, comme l'infiniment petit, appuyée sur une philosophie.

2. Nous ne pouvons pas dire que, si la théorie des ensembles est le fondement de la mathématique, la logistiquerie, qui a la même nature que cette théorie, n'est pas autre chose que la mathématique elle-même. Mais une chose est vraie : la logique est une condition nécessaire pour que la mathématique soit mathématique. Autrement dit la logique est un principe négatif de la mathématique ; une proposition mathématique ne peut pas être établie sans la logique. La logique étudie seulement comment une proposition peut être vraie ; quant à l'établissement des indémontrables, qui sont aussi les essences de la mathématique, la responsabilité ne lui en incombe pas.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE

I. — R. BAIRE :

- (1) Leçon sur les fonctions discontinues.
- (2) *Ibid.*, p. 78.

II. — E. BOREL :

- (1) Leçon sur les fonctions de variables réelles. Note III.
- (2) *Ibid.*, p. 22.
- (3) *Ibid.*, p. 14.

III. — G. BOULIGAND :

Leçon sur introduction à la géométrie infinitésimale directe.

IV. — L. BRUNSCHVIG :

Les Etapes de la Philosophie mathématique, p. 156.

V. — COUTURAT :

- (1) Principe des mathématiques. (*Revue de Métaphysique et de Morel*), 1904. (Abréviation : R. M. M.).
- (2) et (3) *Ibid.*
- (4) Sur les rapports logiques des concepts et des propositions. (*R. M. M.*, 1917).
- (5) Philosophie mathématique de Kant. (*R. M. M.*, 1904).

VI. — A. DENJOY :

- (1) et (2) Sur les nombres dérivés. (*Journal des Mathématiques*, 1915).
- (3) et (4) Sur les fonctions dérivées non-sommables. (*Ann. Sc. de l'Ecole Norm.*, 1916).

VII. — DE LA VALLÉE-POUSIN :

- (1) Intégrales de Lebesgue (préface).
- (2) et (3) *Ibid.*, troisième partie.

VIII. — DRACH :

Essai sur une théorie générale de l'intégration. (*Ann. Sc. de l'Ecole norm.*, 1898).

IX. — DU PASQUIER :

Le Calcul de la Probabilité, p. 25.

X. — A. FRAENKEL :

- (1) Einleitung in die Mengenlehre, p. 210.
- (2) *Ibid.*, p. 24.

XI. — E. GOBLOT :

- (1) *Traité de Logique*, p. 161.
- (2) *Ibid.*, p. 254.
- (3) *Ibid.*, p. 108.
- (4) *Ibid.*, p. 328.
- (5) *Ibid.*, p. 139.

XII. — JORDAN :

Cours d'analyse, t. II, p. 90.

XIII. — KANT :

- (1) *Critique de la Raison pure* (trad. par J. BARNI), p. 133.
- (2) *Ibid.*, p. 36.
- (3) *Ibid.*, p. 50.

XIV. — H. LEBESQUE :

- (1) *Leçon sur l'intégration*, p. 8.
- (2) et (3) *Ibid.*, p. 130.
- (4) *Ibid.*, chapitre XI.
- (5) Sur certaine démonstration d'existence. (*Bull. de la Science mathématique*, 1915).

XV. — H. POINCARÉ :

- (1) *Science et Méthode*, chapitre II.
- (2) *La Science et l'Hypothèse*, chapitre premier.
- (3) et (4) *Ibid.*, p. 67.
- (5) *Ibid.*, p. 59.
- (7) et (8) *Ibid.*, p. 65, p. 69.
- (6) *La Valeur de la Science*, p. 29.

XVI. — A. PADOA :

- (1) Les extensions successives de l'ensemble des nombres au point de vue décisifs. (*Acte du Congrès international de Philosophie scientifique*, 1935).
- (2) Classes et pseudo-classe. (*Ibid.*, 1936).
- (3) *Ibid.*

XVII. — A. REY :

- (1) *La Philosophie moderne*, chapitre II.
- (2) *Ibid.*, p. 12.

XVIII. — A. REYMOND :

- (1) La négation et le principe du tiers exclu. (*Acte du Congrès intern. de Philosophie*, 1935).
- (2) Les Principes de la Logique et la Critique contemporaine, p. 83.

XIX. — J. RICHARD :

- (1) *Considération sur la Logique et les Ensembles*. (*R. M. M.*, 1920).
- (2) Sur la nature des axiomes de la géométrie. (*L'Enseignement mathématique*, 1907).

XX. — B. RUSSELL :

- (1) Introduction to mathematical philosophy, chapter I.
- (2) *Ibid.*, p. 194.
- (6) *Ibid.*, chapter VIII.
- (7) *Ibid.*, chapter XVIII.
- (8) *Ibid.*, p. 195.
- (9) *Ibid.*, p. 122.
- (3) et (4) Principia Mathematica, vol. I.
- (5) The Principles of Mathematics, vol. I, part. I.
- (10) *Ibid.*, chapter I.
- (11) *Ibid.*, chapter II.

XXI. — SCHEFFER :

A set of five postulats for Bolle etc. (*Trans. of. Amer. Math. Soc.*, 1913).

XXII. — W. SIERPINSKI :

- (1) Leçon sur les Nombres transfinis, p. 2.
- (2) *Ibid.*, p. 131.
- (3) *Ibid.*, p. 99.

XXIII. — TARSKI :

- (1) Sur le terme primitif de la logique. (*Fundamenta Mathematica*, 1924).
- (2) Sur l'ensemble fini. (*Ibid.*, 1924).

XXIV. — L. ROUGIER :

La Philosophie géométrique de Henri Poincaré, chapitre V.

BIBLIOGRAPHIE II

(Concernant les sujets suivants : les nombres transfinis et le principe du tiers exclu.)

1. — LES NOMBRES TRANSFINIS

- R. BAIRE. — Leçon sur les fonctions discontinues, p. 41.
E. BOREL. — Leçon sur la théorie des fonctions, note IV.
G. CANTOR. — Une contribution à la théorie des ensembles. (*Acta Mathematica*, 1883).
— Sur les ensembles infinis et linéaires de points. (*Acta Mathematica*, 1883).
— Fondements d'une théorie générale des ensembles. (*Acta Mathematica*, 1883).
L. COUTURAT. — De l'infini mathématique, livre II et note IV.
H. LEBESGUE. — Leçon sur l'intégration. (Note sur les nombres transfinis).
J. RICHARD. — Sur un paradoxe de la théorie des ensembles et sur l'axiome de Zermelo. (*L'Enseignement Mathématique*, 1907).
D. MIRIMANOFF. — Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles. (*L'Enseignement Mathématique*, 1917).
W. SIERPINSKI. — Leçon sur les nombres transfinis.

2. — LE PRINCIPE DU TIERS EXCLU

- F. GONSETH. — La mathématique et la réalité. (Chapitre XI).
P. LÉVY. — Sur le principe du tiers exclu. (*R. M. M.*, 1926).
— Critique de la logique empirique. (*R. M. M.*, 1926).
A. REYMOND. — La négation et le principe du tiers exclu. (*Acte du Congrès de Philosophie*, 1935).
— Le principe de la logique et la critique contemporaine. (Chapitre VI).
R. WAVRE. — Logique formelle et logique empiriste. (*R. M. M.*, 1926).
— Sur le principe du tiers exclu. (*R. M. M.*, 1926).

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	5
<i>Chapitre I. — APERÇU HISTORIQUE</i>	7
1. Généralités	7
2. Le développement de la théorie des ensembles	11
3. L'application de la théorie des ensembles sur l'intégration	13
4. La théorie des ensembles et la géométrie	17
5. La théorie des ensembles et la philosophie mathématique	19
<i>Chapitre II. — SUR LA DÉFINITION</i>	27
1. L'Arbre de Porphyre	28
2. Le complémentaire d'une classe	30
3. Proposition absurde	33
4. Définition positive et définition négative	37
5. L'Existence du complémentaire d'un complémentaire	39
6. La condition nécessaire et suffisante	40
7. Hypothèse de l'existence de la définition positive	42
8. Définition descriptive et Définition constructive	45
9. Description et Définition	48
10. Remarque	50
<i>Chapitre III. — SUR LA DÉMONSTRATION</i>	53
1. Notions préliminaires	53
2. Définition de la démonstration	60
3. Lois et principes fondamentaux pour la démonstration	65
4. Principe du syllogisme	68
5. Dédution et Induction	74
6. Démonstration positive et Démonstration négative	82
7. Démonstration et vérification	85

<i>Chapitre IV. — SUR L'EXISTENCE</i>	87
1. Connaissance et Existence	87
2. Existence empirique et Existence pure	89
3. Existence mathématique	93
4. L'expression symbolique	96
5. Nombres transfinis	98
6. Axiome de Zermelo	102
7. Induction transfinie	105
8. Conclusion	108
 <i>Chapitre V. — SUR LA PROBABILITÉ</i>	111
1. La logique de la certitude et la logique de la probabilité	111
2. Le principe de la participation	113
3. Notion de la probabilité	116
4. Syllogisme probable	120
5. Quelques natures de la probabilité	125
6. Le principe du tiers exclu	130
7. Le paradoxe du tiers exclu	132
 <i>Chapitre VII. — SUR L'HYPOTHÈSE</i>	135
1. Les indéfinissables	136
2. Les indémontrables	141
3. L'Axiome et le Postulat	145
4. Comment les indémontrables sont-ils possibles ?	148
5. La théorie de la raison manquante	150
 <i>Chapitre VII. — CONCLUSION</i>	153
1. Les étapes de la philosophie mathématique	153
2. La mathématique et la logique	156
 INDEX BIBLIOGRAPHIQUE	159
 BIBLIOGRAPHIE II	162

Vu le 1^{er} Février 1938 :

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES LETTRES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS,
J. VENDRYES.

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
ROUSSY.

LISTE DES ABRÉVIATIONS :

Nous nous excusons auprès de nos lecteurs ; mais pour faciliter la composition de notre travail, nous avons dû employer les signes suivants :

c au lieu de (inclusion). $\subset$ Exemple page 14 : McN ,
c'est-à-dire M inclusion N .

$<$ au lieu de (ordre). $\prec$ Exemple page 25 : $N < (N+I)$,
c'est-à-dire N ordre $(N+I)$.

A_{i-1} a été remplacé par A_{1-1}

A_{i+1} a été remplacé par A_{1+1}

B_{i-1} a été remplacé par B_{1-1} , etc...



IMPRIMERIE SPECIALE
DE
MM. VIGOT Frères



